ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 1er JUIN 1931.

PRÉSIDENCE DE M. Louis de LAUNAY.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

Après le dépouillement de la Correspondance M. le **Président** s'exprime en ces termes :

Un télégramme vient de nous apprendre la mort de notre confrère M. **Eugène Cosserat**, Membre non résidant depuis le 31 mars 1919.

L'œuvre scientifique de M. Cosserat comprend des travaux d'astronomie, de mathématiques pures et de mécanique.

Né à Amiens le 4 mars 1866, entré à l'École Normale à 17 ans, il fut, après son agrégation, chargé d'un cours de mathématiques au lycée de Rennes, puis bientôt nommé aide astronome à l'Observatoire de Toulouse dont il devait plus tard devenir le directeur. Il y eut dans sa vie une première période pendant laquelle il porta tous ses efforts sur l'observation des étoiles doubles, des petites planètes, des satellites de Saturne. Chargé en 1888 d'un cours complémentaire de mathématiques à la Faculté des Sciences de Toulouse, il s'orienta dès lors en même temps vers des recherches de géométrie. Ce fut d'abord une thèse remarquée sur la théorie du cercle considéré comme élément générateur dans l'espace, puis des études sur les surfaces admettant plusieurs séries de coniques, sur les systèmes cycliques, sur les surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle, sur la déformation des surfaces, etc.

A partir de 1895, devenu professeur de calcul différentiel et intégral, il quitta l'Observatoire et commença avec son frère aîné François Cosserat, ingénieur en chef à la Compagnie des Chemins de fer de l'Est, une série de travaux sur la théorie de l'élasticité par lesquels il établit avec lui sur des

bases solides la théorie des corps minces. Ils publièrent ensemble des travaux d'un caractère philosophique qui avaient pour but de rattacher les différentes théories de la mécanique à un concept général unique en faisant rentrer dans le champ de la mécanique rationnelle les problèmes de la déformation des corps.

Nommé, en 1908, directeur à l'Observatoire de Toulouse, il revint définitivement aux études astronomiques qui avaient occupé sa jeunesse. Il fit de nombreuses photographies d'amas et de nébuleuses et de très importantes mesures de satellites des planètes principales. Il apporta une collaboration active à l'entreprise de la Carte photographique du Ciel.

L'œuvre de M. Cosserat a été qualifiée par les meilleurs juges, Henri Poincaré et Paul Appell, dans les termes les plus élogieux. Ils la qualifient de « variée et profonde, allant de la Géométrie infinitésimale à l'étude de l'équilibre et du mouvement des milieux continus, de la théorie moderne des fonctions aux fondements de la Mécanique et de la Physique mathématique ». C'était un géomètre érudit et délié, difficile pour lui-même et ne publiant que des mémoires parfaitement achevés.

Au nom de l'Académie, j'adresse à la famille de notre regretté confrère l'expression de notre bien sympathique condoléance; la séance sera levée en signe de deuil dès qu'il aura été procédé à l'élection inscrite à l'ordre du jour.

MINÉRALOGIE. — *Les minéraux de la syénite néphélinique à ægyrine du nord de l'île Kassa. Les diverses phases pneumatolytiques des syénites néphéliniques de l'archipel de Los*. Note de M. **A. Lacroix**.

J'ai montré jadis (¹) que l'extrémité septentrionale de l'île Kassa est constituée par une syénite néphélinique à grands éléments dont la composition chimique est très analogue à celle de l'île Rouma, mais ne renferme pas les minéraux rares qui ont rendu celle-ci célèbre. En longeant la pointe de Kassa, j'avais vu cette syénite à l'état de gros blocs éboulés des hauteurs, au milieu de la végétation tropicale.

Depuis lors, des travaux entrepris dans le port de Conakry ont conduit à ouvrir en ce point une carrière pour l'extraction de moellons; son front de taille, mesurant une centaine de mètres sur 25 à 30^{m}, donne la possibilité

(¹) *Nouvelles Archives du Muséum*, 5e série, **III**, 1911, p. 19.

d'étudier cette roche dans des conditions de fraîcheur exceptionnelle. Elle est grise, ses éléments ont jusqu'à 1cm de diamètre; à l'œil nu, l'on ne voit guère que de l'orthose sodique grisâtre et de la néphéline de même couleur. Les minéraux colorés sont l'acmite et l'arfvedsonite; il est facile d'étudier les multiples modalités de la transformation de l'amphibole en acmite jaune qui est le métasilicate stable; un peu de pyrochlore, de lâvénite, de fluorine, sont encore à signaler.

Sur la vaste surface mise à jour, il n'existe pas de filons, mais des taches, des veinules de facies de différenciation, à grain plus fin ou à grain plus gros. Si actuellement l'on n'y trouve aucun minéral spécial, il n'en a pas été de même au début de l'exploitation; j'ai reçu, en effet, de MM. Sérand et Pagé une série remarquable de minéraux qui font l'objet de cette Note. Ils proviennent du facies de variation pegmatique.

La roche est leucocrate, ses feldspaths sont d'un blanc jaunâtre; la néphéline et la sodalite, rosées ou blanches; l'acmite est aciculaire et jaunâtre; il existe un peu de fluorine rosée. Çà et là, se rencontrent des nodules jaunes, finement cristallins, de 1 ou 2cm de diamètre formés par de petits cristaux de lâvénite, avec périphériquement une ceinture d'acmite. Les deux minéraux ont une couleur très analogue, mais l'abondance des macles polysynthétiques, le polychroïsme plus intense, avec maximum transversal à l'allongement, enfin les angles d'extinction plus grands rendent facile la distinction de la lâvénite.

Dans des portions ne mesurant guère que de 10 à 30cm de diamètre ont été recueillis d'autres minéraux. L'*astrophyllite*, l'*eucolite*, brun cannelle translucide, en lames ou en plages de plus d'un centimètre de diamètre, doivent être signalées tout d'abord. L'eucolite renferme en inclusions des cristaux de *catapléite* qui sont peut-être primaires; elle est accompagnée de *cancrinite* jouant le même rôle que la losite à Rouma. La présence de l'eucolite mérite d'être signalée, car elle démontre l'exactitude d'une hypothèse que j'avais faite autrefois en attribuant, à des pseudomorphoses de ce minéral, des agrégats de grains troubles de zircon, de plages de mésotype et d'acmite rencontrés dans des échantillons de surface.

La sodalite est en moyenne moins abondante qu'à Rouma, mais j'ai observé un cristal mesurant 4cm de diamètre, sa couleur est bleue; cette sodalite possède une fluorescence intense inexistante dans le minéral de même couleur des pegmatites de la côte orientale de la même île.

Le minéral le plus remarquable est la *villiaumite* qui est ainsi rencontrée dans un second gisement; elle gît dans les pegmatites à structure foyaïtique

dont elle remplit les intervalles miarolitiques, mais ceux-ci sont ici de grandes dimensions et je possède un cube de clivage mesurant 2^{cm} d'arête. La villiaumite de Kassa n'a pas la couleur carmin foncé de celle de Rouma, elle est d'un rouge vineux; le minéral n'est pas fluorescent, mais quand, sur ses bords, la couleur s'atténue pour devenir rose, alors apparaît une fluorescence d'un rouge feu magnifique; cette même propriété se remarque sur de petits cristaux transparents, d'un rose très pâle, tapissant une géode; ce sont des octaèdres avec les faces du cube, et les premières formes distinctes observées autrement que par clivages. La villiaumite enveloppe aussi quelquefois les autres minéraux de la roche avec, en outre, des mouches de pyrite et de *galène*.

Quelques autres géodes ont été trouvées; dans l'une, se rencontre un cristal net, transparent de sérandite le minéral que j'ai récemment décrit à Rouma : il est allongé suivant ph^1, et présente les formes $o^1(101)$, $h^1(100)$, h^x, $g^1(010)$. Une autre est tapissée de cristaux de mésotype, transparente, recouverts par des rhomboèdres de *dialogite*, d'un beau rose, englobant ou supportant des lames d'un minéral, d'un rouge presque noir, rappelant par sa forme la crichtonite de l'Oisans, mais il est transparent, uniaxe, optiquement négatif, c'est la *pyrophanite*, titanate de manganèse connu jusqu'alors seulement à l'état de grande rareté dans le gisement métallifère de Pajsberg en Wermland. Sur ces groupements, sont implantés quelques cristaux de mésotype, les trois minéraux sont donc contemporains.

Çà et là, ont été rencontrées dans la syénite normale des zones ayant au maximum 1^{m^3} où la roche est devenue noirâtre, un peu terne et chargée de nombreux grains ou cubes de pyrite. Elle renferme des nodules de mésotype dont les baguettes un peu bacillaires peuvent mesurer jusqu'à 15^{cm} de longueur, et encore des cavités remplies par de beaux cristaux d'analcime entassés les uns sur les autres, recouverts localement par des paillettes de *stilpnomélane* ou de beaux cristaux de mésotype. L'un des trapézoèdres d'analcime étudiés est complètement isolé, avec 7^{cm} de diamètre; il est recouvert par des cristaux du même minéral de plus faibles dimensions.

La mésotype est toujours de formation postérieure à l'analcime. Ses formes sont variées : elle constitue des édifices polysynthétiques pyramidaux, fibrolamellaires, blancs à leur base et plus ou moins opaques; ils se terminent par des cristaux nets limpides. Exceptionnellement des cristaux

plus petits, incolores et limpides au centre, blancs et opaques à l'extérieur, possèdent de larges faces g^1 (010) qui les font ressembler à la stilbite.

Une dernière variété se présente en cristaux n'ayant guère que 1mm, mais avec des faces très brillantes et une grande réduction de la zone verticale, ce qui leur donne l'apparence de petits zircons. Ils ont une coloration rose, due à des traces de manganèse, particularité qui semble n'avoir jamais été signalée dans ce minéral. Ces trois variétés de mésotype ont respectivement pour densité 2,245, 2,243 et 2,248.

Enfin à ces zéolites, sont associés des cubes parfaits de pyrite dont la cristallisation s'est produite à la fin de celle de l'analcime et avant celle de la mésotype.

Ces diverses observations conduisent à quelques considérations générales. Dans une étude des pegmatites granitiques gemmifères de Madagascar, j'ai montré qu'elles ont été soumises, à la fin de leur formation, à deux phases successives de pneumatolyse (1).

J'ai appelé l'une *constructive*, parce qu'elle continue, sans hiatus, la cristallisation de la roche, mais avec augmentation du rôle des minéralisateurs et des sels solubles du magma, ce qui entraîne non seulement des dimensions plus grandes du grain de la roche, mais encore des modifications dans sa composition minéralogique et chimique. A ce point de vue, cette phase est caractérisée par l'accroissement de l'importance des minéraux sodiques et l'apparition de minéraux lithiques; l'albite prédomine sur le microcline, le mica est la lépidolite, en grandes lames; les cristaux de tourmaline ferrifère normale de la roche se continuent dans les druses par des portions lithiques de même orientation, rouges ou roses, colorés par du manganèse; le béryl appartient à la variété césifère et manganésifère, etc.

Dans les pegmatites néphéliniques de Rouma, la caractéristique de cette phase réside dans la présence des zéolites (analcime et mésotype), de l'eucolite, de la sérandite, et, à Kassa, de la sérandite et des deux minéraux que je viens de signaler, la dialogite et la pyrophanite; sauf les zéolites, tous sont riches en manganèse. Il est incontestable que les zéolites, qui ont cristallisé simultanément avec les autres minéraux, sont d'origine primaire; en effet, elles englobent parfois des cristaux intacts de néphéline et par conséquent ne se sont pas formées à ses dépens. La villiaumite clôture cette phase, mais il est à remarquer que ce fluorure de sodium ne se trouve pas à Kassa,

---

(1) *Minéralogie de Madagascar*, II, 1922, p. 310.

dans les mêmes druses que les minéraux manganésifères, alors qu'à Rouma, il est le compagnon de la sérandite et de l'eucolite.

A cette phase constructive succède dans les pegmatites granitiques de Madagascar une phase, que j'ai appelée *destructive*, parce que, liée sans doute à une température moins élevée, correspondant à des conditions de cristallisation brusquement changées, tous les minéraux, dont il a été question plus haut, sont attaqués par les derniers fluides circulant dans les cavités de la roche incomplètement refroidie. Les cristaux de microcline, perdant beaucoup de matière, sont transformés en moules creux formés par des cristaux d'albite; les cristaux de tourmaline sont corrodés et dissous, et de même les micas, et il apparaît une nouvelle génération de tourmaline lithique presque incolore en petites aiguilles extrêmement fines, des lamelles blanches de lépidolite, un minéral spécial que j'ai appelé la *bityite*, etc.; tous ces produits néogènes sont implantés sur les cadavres des minéraux de la phase précédente. A Kassa, cette phase destructive est caractérisée par la production d'une nouvelle génération de zéolites, seulement accompagnées de pyrite. L'examen microscopique de la gangue des beaux cristaux de mésotype et d'analcime décrits plus haut fait voir, en effet, que le feldspath potassique de la syénite a disparu, il a été transformé en albite; celle-ci, à son tour, de même que la néphéline et la sodalite, est en voie d'épigénisation par l'analcime, enfin cette dernière se transforme en mésotype. Seuls quelques débris très corrodés d'acmite flottent au milieu de ces minéraux hydratés.

Cette dernière phase zéolitique doit être comparée à celle décrite par M. Brögger [1] dans les syénites néphéliniques du Langesundfjord. Étant donnée l'abondance du fluor dans les syénites des îles de Los et sa mobilisation facile sous forme de villiaumite un peu soluble dans l'eau, je m'attendais à y trouver l'apophyllite, si fréquente dans les syénites de Norvège; il n'en a rien été et de même je n'ai rencontré aucun fluocarbonate, dont M. Brögger a signalé plusieurs espèces (parisite, etc.), dans une phase ultime de corrosion postérieure à celle ayant donné naissance aux zéolites.

---

[1] *Zeitschr. für Kristallogr.*, 16, 1890, p. 168.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les valeurs moyennes partielles et leur application aux problèmes de Physique mathématique.* Note de M. **Jules Drach.**

J'appelle valeur moyenne *partielle* d'une fonction de n variables sa valeur moyenne pour un domaine D qui a, en général, moins de n dimensions et éventuellement n dimensions. Cette moyenne partielle dépend des *variables nouvelles* qui fixent le domaine D et possède ainsi des propriétés nouvelles, distinctes de celles de la fonction, et qui peuvent être plus simples quand on choisit convenablement ce domaine D [1]. L'introduction *systématique* de ces éléments, pour des fonctions d'une, deux, trois ou quatre variables, m'a paru conduire, de manière régulière et uniforme, à certains résultats classiques de Physique mathématique et donner lieu à des généralisations utiles. Je me bornerai aujourd'hui à quelques exemples.

1. Pour une fonction $\rho(x, y, z)$ de trois variables, assimilée à une *densité*, les *partielles* les plus importantes sont la *moyenne sphérique* ρ_m,

$$\rho_m = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_{\Sigma}\rho(x+r\alpha, y+r\beta, z+r\gamma)\,d\sigma,$$

l'intégrale double est étendue à la sphère Σ de centre x, y, z et de rayon r; $\alpha = \sin\theta\sin\varphi$, $\beta = \sin\theta\cos\varphi$, $\gamma = \cos\theta$ et $d\sigma = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, et la moyenne sphérique *pleine*

$$\rho_\mu = \frac{3}{4\pi r^3}\int\int\int_{(\Sigma)}\rho(x+r\alpha, y+r\beta, z+r\gamma)\,d\tau,$$

où $d\tau$ est l'élément de volume, l'intégrale étant prise dans le volume (Σ) limité par la sphère Σ. On a d'ailleurs

$$r^3\rho_\mu = 3\int_0^r r^2\rho_m\,dr.$$

La moyenne sphérique ρ_m est une fonction des quatre arguments x, y, z, r, *paire* en r, qui satisfait à l'équation

$$\Delta\rho_m = \frac{\partial^2\rho_m}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\rho_m}{\partial r}, \quad \text{qui s'écrit encore} \quad \Delta r\rho_m = \frac{\partial^2 r\rho_m}{\partial r^2},$$

Δ désignant l'opérateur de Laplace $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Ce résultat se déduit

(1) Les variables anciennes peuvent subsister comme *paramètres*.

aisément d'une formule de Green : $\iiint \Delta V\, d\tau = \iint \frac{dV}{dn} d\sigma$ appliquée à la sphère Σ. On observera que l'expression de $\Delta\rho_m$ est ce que l'on obtient quand ρ_m dépend de r seul, regardé comme égal à $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. Enfin les dérivations en x, y, z, r sont *permutables* avec le passage de ρ à ρ_m; *ceci est essentiel.*

2. A toute fonction $\rho(x, y, z)$ (même discontinue sous certaines conditions) est associé un *potentiel* $V = \iiint \frac{\rho\, d\tau}{r}$ où $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$, $d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ et $r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$. L'intégrale, étendue à un volume fini de l'espace ξ, η, ζ, s'exprime, en posant $d\tau = dr\, d\sigma$, sous la forme d'une intégrale simple

$$V(x, y, z) = 4\pi \int_0^R r\rho_m\, dr$$

où R est choisi assez grand pour que la sphère de centre x, y, z et de rayon R comprenne à son intérieur tous les points où la densité $\rho(x, y, z)$ n'est pas nulle; sinon, R sera remplacé par ∞.

On a immédiatement

$$\Delta V = 4\pi \int_0^R \Delta r\rho_m\, dr = 4\pi \int_0^R \frac{\partial^2 r\rho_m}{\partial r^2} dr,$$

d'où

$$\Delta V = 4\pi \left(\rho_m + r\frac{\partial \rho_m}{\partial r}\right)_0^R,$$

et comme, manifestement, lorsque $\rho(x, y, z)$ est continu ou même contient des termes $\frac{A(x, y, z)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$ où A est fini en a, b, c,

$$(\rho_m)_0 = \rho(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial r}\right)_0 = 0, \quad \ldots,$$

on a simplement

$$\Delta V = -4\pi\rho(x, y, z).$$

C'est la formule de Poisson, qui montre que les dérivées secondes de V sont discontinues quand on traverse la surface qui limite le volume où ρ n'est pas nul ([1]), et redonne ρ quand V est connu. L'expression $\rho(x, y, z) = \lim_{r=0} \rho_m$ prouve aussi que ρ sera connu en même temps que ρ_m.

([1]) On ne manquera pas de remarquer la relation $r\rho_m = B$ qui lie la moyenne sphérique au *potentiel sphérique* si ingénieusement introduit par Boussinesq; c'est d'ailleurs l'étude des divers potentiels spéciaux considérés par Boussinesq, qui nous a

3. Sans insister sur les applications de la moyenne sphérique à la théorie des potentiels et à l'équation

$$\Delta\rho + \lambda\rho = f(x, y, z),$$

par exemple [nous y reviendrons ailleurs], indiquons sur quelques exemples l'application de notre méthode. Supposons qu'il s'agisse de déterminer $\rho(x, y, z, t)$ par l'équation des ondes :

$$\Delta\rho = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2},$$

avec les conditions initiales

$$[\rho(x, y, z, t)]_{t=0} = A(x, y, z), \qquad \left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]_{t=0} = B(x, y, z),$$

dans un certain volume (S) limité par la surface S.

On déduit de là

$$\Delta\rho_m = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\rho_m}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho_m}{\partial t^2}$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 r\rho_m}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 r\rho_m}{\partial t^2},$$

avec les conditions initiales

$$(\rho_m)_{t=0} = A_m, \qquad \left(\frac{\partial\rho_m}{\partial t}\right)_{t=0} = B_m.$$

Ainsi ρ_m vérifie l'équation des ondes sphériques, $r\rho_m$ celle des ondes rectilignes (équation des cordes vibrantes). Les solutions classiques du problème des cordes vibrantes se transportent donc ici. Une fois ρ_m connu en r, t, x, y, z on aura ρ par la formule $\rho(x, y, z, t) = \lim_{r=0} \rho_m$, ce qui donne la formule classique de Poisson lorsque A et B sont continus. Il faudra tenir compte des centres singuliers d'ébranlement (pôles de A et B) s'il en existe. La formule de Kirchhoff s'obtient avec la moyenne sphérique *pleine*.

Il est clair que la même méthode s'appliquera à tout problème régi par une équation

$$\Delta\rho = \mathcal{F}(\rho).$$

---

amené à leur substituer des éléments plus généraux définis *naturellement* pour des domaines D et choisis de façon à satisfaire à des équations aux dérivées partielles simples. Ces éléments jouent un rôle important, non seulement dans les questions de Physique mathématique : Élasticité, Dynamique des fluides, Électricité, mais aussi en Mathématiques pures : Théorie des fonctions d'une et de plusieurs variables complexes. La non-permutabilité du potentiel B avec la dérivation en r s'oppose à son emploi général.

où $\mathcal{F}(\rho)$ est linéaire en $\rho, \frac{\partial\rho}{\partial t}, \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}, \ldots$, les coefficients pouvant dépendre du temps. Elle s'applique donc à l'équation de la chaleur $\Delta\rho = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}$ qu'elle ramène à la forme

$$\frac{\partial^2 r\rho_m}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial r\rho_m}{\partial t}$$

qui convient au refroidissement d'une tige rectiligne ou d'une sphère et dont l'étude a été faite en détail.

Les conditions aux limites pour ρ, étant linéaires en ρ et $\frac{\partial\rho}{\partial t}$, donneront les conditions aux limites pour ρ_m. On obtiendra ρ par l'équation

$$\rho = \lim_{r=0} \rho_m(x, y, z, r, t).$$

4. Pour le cas des fonctions de deux variables, il y aura lieu de considérer une *moyenne circulaire*

$$\rho_m = \frac{1}{2\pi r}\int_\Gamma \rho(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, r\, d\theta$$

et une moyenne circulaire *pleine*

$$\rho_\mu = \frac{1}{\pi r^2}\int\int_{(\Gamma)} \rho(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr,$$

liée à la première, qui rendront des services analogues.

On aura

$$\Delta\rho_m = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\rho_m}{\partial r}\right),$$

et si l'on définit le *potentiel logarithmique* par

$$V = -2\pi\int_0^R r\log r.\rho_m\, dr,$$

on a ici : $\Delta V = -2\pi\rho(x, y)$ et toujours $\rho(x, y) = \lim_{r=0}\rho_m$.

L'équation des ondes cylindriques se ramène à l'équation d'Euler et Poisson, $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, dont Poisson a donné l'intégrale; la détermination de ρ_m par les conditions aux limites est immédiate. On peut de même traiter l'équation du mouvement calorifique dans un plan — et interpréter la solution par la méthode des *sources*.

5. Je signalerai encore que les équations du mouvement élastique en l'absence de forces sont susceptibles d'une résolution analogue. On a, pour déterminer u, v, w, les équations, en milieu isotrope,

$$\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad \text{où } \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

avec des conditions initiales qui fixent, pour $t = 0$, les valeurs de u, v, w et des dérivées $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$, dans le domaine où ces éléments ne sont pas nuls.

On sait que θ dépend de l'équation des ondes; donc θ_m dépend de celle des cordes vibrantes. On a ensuite pour u_m, par exemple,

$$\frac{\partial^2 r u_m}{\partial r^2} + k\frac{\partial r\theta_m}{\partial x} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 r u_m}{\partial t^2}.$$

La dilatation θ_m étant déterminée par les conditions initiales, on sait, d'après Cauchy, trouver u_m par quadratures puisqu'on connaît la solution de l'équation homogène en ru_m. Il ne restera qu'à fixer les arbitraires de u_m.

6. Il est clair que des moyennes analogues peuvent servir pour les problèmes de l'*Univers* d'Einstein et Minkowski. J'ajouterai que pour les équations de type hyperbolique, à coefficients *variables*, les domaines D devront être des parties de *caractéristiques*, par exemple pour les équations de Laplace

$$F(\rho) = \frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial\rho}{\partial x} + b\frac{\partial\rho}{\partial y} + c\rho = 0,$$

des segments parallèles à Ox ou à Oy ou des rectangles. On retrouve ainsi la méthode célèbre de Riemann étendue par Darboux en calculant la moyenne *pleine* du produit $\nu F(\rho)$; le cas d'une seule variable donne l'adjointe de Lagrange, etc.

Nous reviendrons prochainement sur ces points et sur d'autres applications de la méthode, regardée comme *un moyen général de régulariser l'expression des phénomènes, continus ou non, dans le temps et dans l'espace.*

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur le titrage de l'acide phosphorique.* Note [1] de M. P. VILLARD.

Les résultats que vient de publier M. A. Sanfourche sur le titrage de l'acide phosphorique [2] confirment entièrement, et, s'étendant à la strontiane, complètent ce que j'avais publié en 1930 [3].

M. A. Sanfourche dit en effet, à la fin de sa Note, qu'avec la strontiane le virage de la phtaléine commence un peu après la saturation de la seconde fonction acide, mais qu'il est fugace, et ne devient stable que juste pour la troisième fonction; l'acide phosphorique, neutralisé par la strontiane, se revèle donc tribasique à la phtaléine; le parallélisme est parfait avec ce que, moyennant quelques précautions très simples, j'avais obtenu dans le cas de la baryte. Je rappelle brièvement les faits observés et l'interprétation que j'ai donnée à leur sujet :

On savait qu'en suivant les indications données par A. Joly [4], la phtaléine vire franchement dès que la seconde fonction est saturée; j'ai montré que ce virage, bien qu'assez sûr pour permettre un bon titrage, n'est pas en réalité stable et définitif; la coloration de l'indicateur disparaît d'elle-même à froid au bout d'un temps parfois assez court, et très rapidement si l'on chauffe vers 60°.

J'ai expliqué ce fait en disant que la combinaison de la baryte avec le précipité cristallisé que A. Joly recommandait d'obtenir, ne s'effectue que très difficilement; la base ajoutée au delà de ce qui précipite tout l'acide, soit $2\,BaO$ pour $2\,PO^4H^3$, doit rester libre plus ou moins longtemps, d'où le virage. Utilisant alors le bleu C4B, indicateur il est vrai médiocrement précis, mais qui offre l'avantage de révéler la présence d'une base libre, j'ai pu vérifier que les choses se passent bien comme je l'avais supposé.

Ayant ainsi reconnu que le virage constaté par A. Joly était précaire, et que la réaction entre la baryte et le précipité s'effectuait facilement quand on élevait la température, j'ai précisé les conditions qui permettent d'atteindre la saturation complète de l'acide; elles consistent à opérer vers 100°, en agitant constamment, et à verser l'eau de baryte par quantités

---

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1225.

(3) *Comptes rendus*, **191**, 1930, p. 1101.

(4) *Comptes rendus*, **94**, 1882, p. 529; **100**, 1885, p. 55; **102**, 1886, p. 316.

de plus en plus petites. On observe de cette manière une série de virages de moins en moins fugaces, aboutissant à une coloration permanente de la phtaléine quand la troisième fonction acide est saturée. Ces virages sont très francs, car ils sont produits par de la baryte libre, et que, aussitôt celle-ci combinée avec le précipité, la liqueur n'est plus que l'eau pure.

Les expériences faites par M. A. Sanfourche montrent qu'avec la strontiane la réaction se produit plus facilement qu'avec la baryte, d'où un titrage plus commode, mais donnant avec l'une et l'autre base le même résultat.

Dans le cas de la chaux, les résultats obtenus par l'auteur précédent, avec l'électrode à hydrogène en particulier, sont d'accord avec ceux indiqués par M. Cavalier [1] et par nous-même.

L'acide phosphorique doit donc être considéré comme réellement tribasique pour la phtaléine, aussi bien avec la baryte qu'avec la strontiane et la chaux; seules diffèrent les facilités d'emploi de ces bases.

Sur un point de détail cependant, une remarque paraît nécessaire pour dissiper toute confusion.

M. A. Sanfourche semble admettre que, jusqu'à ce jour, les bases alcalino-terreuses n'ont donné que des chiffres variables avec les conditions de l'expérience, et, qu'en outre, avec la phtaléine, la baryte ne peut déceler que la seconde fonction de l'acide phosphorique.

Une telle conclusion manque un peu de généralité; mais elle n'est nullement fondée; assurément les conditions expérimentales sont rarement sans influence, et, de même, les méthodes employées; l'électrode à hydrogène et l'électrode à quinhydrone ne donnent pas toujours les mêmes chiffres; la dilution a souvent beaucoup d'importance, et la température, modifiant les vitesses de réaction, n'est pas indifférente.

Il n'en est pas moins vrai qu'en choisissant des conditions appropriées, le caractère de généralité dont nous venons de parler se manifeste nettement. La strontiane et la chaux décèlent facilement la troisième fonction de l'acide phosphorique, mais avec la baryte on arrive au même résultat en facilitant la réaction par agitation et chauffage, et les chiffres que nous avons publiés, soit 2,97 et 3,00 BaO pour $2PO^4H^3$, offrent la même approximation que ceux donnés par M. A. Sanfourche pour la strontiane : 3,20; 3,02; 3,01; 2,96.

La baryte ne fait donc pas exception et, il n'est pas légitime de dire

---

(1) *Bull. Soc. chim.*, 3e série, 25, 1901, p. 795 et 903.

qu'elle révèle seulement les deux premières fonctions, tandis que la chaux et la strontiane indiqueraient la première et la troisième.

Les faits paraissent au contraire démontrer que, de la baryte à la chaux, se produit une variation progressive des paramètres qui interviennent dans les réactions.

Pour ces trois bases, la saturation de la première fonction est indiquée par l'héliantine; avec la phtaléine, la seconde fonction est très bien accusée par la baryte (méthode de A. Joly), plus difficilement par la strontiane; avec la chaux, on ne la décèle qu'en suivant très exactement le mode opératoire indiqué par M. Cavalier, c'est-à-dire en opérant très lentement, afin de laisser au précipité le loisir de cristalliser.

Inversement, la troisième fonction est plus difficile à mettre en évidence avec la baryte qu'avec la strontiane et surtout la chaux.

On voit que, relativement à l'acide phosphorique, les trois bases se comportent d'une manière semblable; on rencontre seulement dans leur emploi des difficultés qui, suivant le cas considéré, vont en croissant, ou en décroissant, du premier au troisième terme de la série, et le paramètre qui, dans ces difficultés, joue le rôle prépondérant, est la vitesse de cristallisation des précipités, laquelle varie dans une proportion considérable quand on passe de la baryte à la strontiane, et de celle-ci à la chaux.

ALGÈBRE. — *Remarques sur l'interpolation à propos d'une Note récente de M. Wolkowitsch.* Note de M. **M. d'Ocagne**.

J'ai récemment eu l'honneur de présenter à l'Académie (¹) une Note de M. Wolkowitsch, dans laquelle il résout par d'intéressantes considérations géométriques le problème suivant : *y étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont on a obtenu expérimentalement la valeur pour un nombre de systèmes de valeurs des x_i supérieur à $n+1$, trouver les valeurs les plus favorables des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b permettant de mettre l'expression de y sous la forme*

$$y = a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_2) + \ldots + a_n f_n(x_n) + b,$$

les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant données.

J'ai fait observer à M. Wolkowitsch que rien n'empêchait de supposer, dans ce qui précède, les diverses variables x_i réduites à une seule x.

(¹) *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 1008.

Donnant alors aux fonctions f_i une forme simple, telle que $f_i = x^i$, ou $f_i = \sin ix$, on peut ainsi obtenir le nombre voulu des termes d'un développement de Taylor ou de Fourier, considéré comme applicable à une certaine fonction y de x, déterminée empiriquement.

Lorsque, dans l'hypothèse $f_i = x^i$, on suppose que l'on ait $n+1$ déterminations expérimentales de y, on retombe sur le problème classique de l'interpolation au moyen d'un polynome entier en x.

M. Wolkowitsch a bien voulu, à ma demande, développer ses calculs dans ce cas-là, et, en s'aidant d'une formule classique de Vandermond pour le développement des déterminants qui apparaissent en ce cas, il est parvenu précisément ainsi à la formule classique de Lagrange, ce qui ajoute encore de l'intérêt aux résultats très généraux qu'il avait précédemment obtenus.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Déshydratation catalytique, en phase gazeuse, des alcools forméniques en présence de la ponce sulfurique et phosphorique.* Note [1] de M. **Jean-Baptiste Senderens.**

I. J'ai indiqué [2] comment les alcools forméniques à points d'ébullition peu élevés, (alcools méthylique, éthylique, propylique, isopropylique, isobutylique) se déshydrataient par le passage de leurs vapeurs sur le bisulfate de sodium convenablement chauffé.

Il m'a paru intéressant de comparer ces résultats avec ceux que fournirait, dans les mêmes conditions, l'acide sulfurique.

J'ai reconnu tout d'abord que l'acide concentré à 66° B. exerçait sur les vapeurs alcooliques une action destructive qui ne se produit pas, à la même température, avec l'acide dilué marquant 50°-52° B. et se rapprochant de l'hydrate $SO^4H^2 . 3H^2O$.

Je me servais de ponce granulée immergée dans cet hydrate et ensuite égouttée dont je garnissais des nacelles en porcelaine qui étaient chauffées, dans un tube, au four électrique, à la température que réclamait la réaction.

II. Vis-à-vis des alcools propylique, isopropylique, isobutylique, la ponce sulfurique donne sensiblement les mêmes résultats que le bisulfate de sodium.

Il n'en est plus de même pour les alcools éthylique et méthylique, que le

---

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 1167.

bisulfate de sodium déshydrate difficilement au-dessus de 200°, tandis qu'avec la ponce sulfurique leur déshydratation est tout aussi facile qu'avantageuse, et fournit, pour les oxydes d'éthyle et de méthyle, un procédé de préparation industrielle qui semblerait préférable aux modes de fabrication actuellement adoptés.

III. *Oxyde d'éthyle.* — Dès que les nacelles sont portées à 135° on y dirige les vapeurs d'éthanol avec la vitesse qui convient à leur complète décomposition. Si cette température n'est pas dépassée, il ne se fait que de l'éther et de l'eau, sans acide sulfovinique en excès et sans produits de destruction. Le rendement est théorique et correspond à l'équation

$$2\,C^2H^5OH = \underset{\text{Éther.}}{C^2H^5O.C^2H^5} + H^2O.$$

Vers 140° l'éther est accompagné de quelques bulles d'éthylène.

Après 8 jours d'opération à 8 heures par jour, la ponce sulfurique ne paraissait pas altérée dans les nacelles, et le tube qui les contenait était absolument sec. L'éther recueilli séparé de la couche inférieure aqueuse marquait uniformément 56° B.

On pourrait supposer que la ponce granulée sert uniquement à augmenter la surface de contact de l'hydrate sulfurique. Là ne se bornerait pas son rôle, car, en l'absence de la ponce, ou si elle n'est pas égouttée, l'hydrate $SO^4H^2.3H^2O$ se recouvre de liquides noirâtres qui remplissent les nacelles et se déversent dans le tube. Il m'a donc paru que la ponce agit catalytiquement en phase gazeuse comme en phase liquide où j'ai montré son intervention catalytique dans la préparation de l'éthylène (1).

IV. *Oxyde de méthyle.* — L'alcool méthylique est déshydraté dès la température de 140° par la ponce sulfurique avec un dégagement d'éther méthylique qui de 145° à 155° est aussi abondant que celui que j'avais obtenu à 300° avec l'alumine, le sulfate et le silicate d'alumine, qui étaient jusqu'ici les meilleurs catalyseurs pour la préparation de cet oxyde.

V. J'ai appliqué la même technique à l'acide orthophosphorique dont le mélange avec l'éthanol donnerait à 140-145°, d'après Boullay, de l'oxyde d'éthyle (2), et à 200°, d'après Newth, un dégagement d'éthylène plus avantageux qu'avec l'acide sulfurique (3).

---

(1) J.-B. Senderens, *Ann. Chim.*, 9e série, **18**, 1922, p. 119.

(2) Boullay, *Ann. Chim.*, 1re série, **78**, 1811, p. 280.

(3) Newth, *Chem. Soc.*, 7e série, **79**, 1901, p. 915; cf. J.-B. Senderens, *Ann. Chim.*, 9e série, **18**, 1922, p. 132.

Il se formerait tout d'abord un phosphate monoéthylique instable, et l'on aurait ensuite selon la température

(a) $PO^4H^2C^2H^5 + C^2H^5OH = C^2H^5O.C^2H^5 + PO^4H^3$ [1],

(b) $PO^4H^3C^2H^5 = C^2H^4 + PO^4H^3$.

J'ai donc fait passer les vapeurs d'alcool éthylique sur la ponce granulée préalablement immergée dans l'acide phosphorique sirupeux et ensuite égouttée.

La température ayant été maintenue entre 140 et 150°, je n'ai observé ni dégagement d'éthylène, ni formation appréciable d'oxyde d'éthyle.

Ce n'est que vers 160-165° qu'apparaissent les premières bulles d'éthylène dont le dégagement devient régulier vers 180-185°, mais plus faible que celui que fournit la ponce sulfurique bien au-dessous de cette température.

VI. Il résulterait de ces expériences que l'acide phosphorique est un déshydratant des alcools moins actif en phase gazeuse qu'en système liquide. Il n'en est plus de même pour l'acide sulfurique dont le rôle de catalyseur est rendu manifeste par la minime quantité qui en est employée en phase gazeuse. Ainsi se trouve confirmé [2] que, dans les fortes proportions d'acide sulfurique réclamées par la préparation de l'éther par voie humide, la presque totalité sert à atteindre la température où une très faible partie de cet acide agit comme catalyseur.

NOMINATIONS.

M. P. **Marchal** est désigné pour faire partie du jury du concours sur titres ouvert au Ministère de l'Agriculture pour le classement des candidats au poste de *Directeur de l'Institut national agronomique*.

ÉLECTIONS.

Par l'unanimité de 38 suffrages, MM. **H. Deslandres** et **H. Le Chatelier** sont réélus membres du *Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique*.

---

(1) D'après Vogeli, c'est la réaction inverse qui se produirait (*Ann. der. Chem. u. Pharmacie*, 69, 1849, p. 180).

(2) Cf. J.-B. Senderens, *Comptes rendus*, 181, 1925, p. 698.

CORRESPONDANCE.

M. le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts** invite l'Académie à lui présenter une liste de deux candidats au poste de *Directeur de l'Observatoire d'Alger*.

M. le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts** invite l'Académie à lui présenter une liste de candidats à la Chaire de *Phanérogamie* vacante au *Muséum d'Histoire naturelle*.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Détermination des tenseurs par des équations aux dérivées partielles jointes à des conditions à la frontière.* Note [1] de M. **Georges Giraud**.

Considérons une multiplicité bilatère, bornée et fermée, à m dimensions, et sur cette multiplicité deux tenseurs symétriques, $(g_{\alpha,\beta})$ et $(a_{\alpha.\beta})$. On suppose que les formes quadratiques de différentielles

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, g_{\alpha,\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad \text{et} \quad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

sont définies positives; on suppose aussi qu'un nombre fini de représentations paramétriques suffit pour avoir la multiplicité entière, chaque point étant intérieur à une région où une de ces représentations est valable. Le tenseur $(g_{\alpha,\beta})$ est pris comme tenseur fondamental. En se donnant encore des tenseurs $(b_\lambda^{\mu,\alpha})$ et (c_λ^μ) on considère les opérations

$$\mathcal{F}_\lambda u_j = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a^{\alpha,\beta}\, \mathrm{D}_\alpha \mathrm{D}_\beta u_\lambda + \Sigma_{\mu,\alpha}\, b_\lambda^{\mu,\alpha}\, \mathrm{D}_\alpha u_\mu + \Sigma_\mu c_\lambda^\mu u_\mu,$$

$$\mathcal{G}^\lambda v^j = \Sigma_{\alpha,\beta}\, \mathrm{D}_\beta (a^{\alpha,\beta}\, \mathrm{D}_\alpha v^\lambda) - \Sigma_{\mu,\alpha}\, \mathrm{D}_\alpha (e_\mu^{\lambda,\alpha} v^\mu) + \Sigma_\mu c_\mu^\lambda v^\mu,$$

$$e_\lambda^{\mu,\alpha} = \begin{cases} b_\lambda^{\mu.\alpha} & (\mu \neq \lambda), \\ b_\lambda^{\lambda,\alpha} - \Sigma_\beta \mathrm{D}_\beta a^{\alpha,\beta} & (\mu = \lambda), \end{cases}$$

dont la seconde se nomme l'adjointe de la première. On considère encore un domaine ouvert $\mathcal{D}$ dont l'*élément* sera, par définition,

$$d\mathrm{V} = \sqrt{\Delta}\, d(x^1, x^2, \ldots, x^m),$$

---

[1] Séance du 26 mai 1931.

où Δ est le déterminant des $g_{\alpha,\beta}$. La frontière $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{D}$ sera prise dans le sens associé au sens choisi sur $\mathfrak{D}$ (¹), et l'on posera

$$dS = \sqrt{\Delta \Sigma_{\alpha,\beta} (-1)^{(m-1)(\alpha+\beta)} g^{\alpha,\beta} d(x^{\alpha+1}, \ldots, x^{\alpha-1}) d(x^{\beta+1}, \ldots, x^{\beta-1})},$$
$$\varpi_\alpha dS = (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \sqrt{\Delta}\, d(x^{\alpha+1}, \ldots, x^{\alpha-1});$$

dS sera l'*élément* de $\mathfrak{S}$ et les ϖ_α seront les *cosinus directeurs de la normale extérieure*. En se donnant sur $\mathfrak{S}$ le tenseur (ψ_λ^μ), on pose

$$\Theta_\lambda u_j = \Sigma_{\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta} \varpi_\alpha D_\beta u_\lambda + \Sigma_\mu \psi_\lambda^\mu u_\mu,$$
$$Z^\lambda v^j = \Sigma_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha D_\beta (a^{\alpha,\beta} v^\lambda) + \Sigma_\mu (\psi_\mu^\lambda - \Sigma_\alpha b_\mu^{\lambda,\alpha} \varpi_\alpha) v^\mu.$$

Si les dérivées nécessaires existent et sont bornées, on a alors

$$\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} \Sigma_\lambda (v^\lambda \mathfrak{F}_\lambda u_j - u_\lambda \mathfrak{G}^\lambda v^j)\, dV = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Sigma_\lambda (v^\lambda \Theta_\lambda u_j - u_\lambda Z^\lambda v^j)\, dS.$$

Soient encore, en introduisant le tenseur $(\theta_\lambda^{\mu,\alpha})$,

$$\psi_\lambda^\mu = \Sigma_\alpha \varpi_\alpha \vartheta_\lambda^{\mu,\alpha},$$
$$P u_j = \Sigma_{\lambda,\alpha,\beta} a^{\alpha,\beta} D_\alpha u_\lambda D_\beta u^\lambda + \Sigma_{\lambda,\alpha,\beta} u^\lambda D_\alpha u_\lambda D_\beta a^{\alpha,\beta}$$
$$- \Sigma_{\lambda,\mu,\alpha} \left[b_\lambda^{\mu,\alpha} u^\lambda D_\alpha u_\mu - D_\alpha (\theta_\lambda^{\mu,\alpha} u^\lambda u_\mu) \right] - \Sigma_{\lambda,\mu} c_\lambda^\mu u^\lambda u_\mu;$$

on aura

$$\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} \Sigma_\lambda u^\lambda \mathfrak{F}_\lambda u_j\, dV = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Sigma_\lambda u^\lambda \Theta_\lambda u_j\, dS - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} P u_j\, dV.$$

Ces définitions et ces formules contiennent comme cas particuliers celles qui ont déjà été données. On peut ainsi reconstruire toute la théorie. Notamment, si certaines conditions de régularité sont remplies et si une certaine forme quadratique est définie, il existe un tenseur $[G_\lambda^\mu(X, \Xi)]$, fonction de deux points de la multiplicité, dont la dérivée tensorielle seconde relative à X est continue sauf en Ξ, au voisinage duquel on a

$$G_\lambda^\mu(X, \Xi) = \frac{g_\lambda^\mu + o(1)}{\sqrt{\Delta(\Xi) D(\Xi)}} F\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta)}\right],$$

D étant le déterminant des $a^{\alpha,\beta}$ et $A_{\alpha,\beta}$ étant le quotient par D du mineur de $a^{\alpha,\beta}$; $F(r)$ est la solution élémentaire principale de $\Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - u = 0$ (²);

(¹) Voir *Ann. Éc. Norm.*, 43, 1926, p. 1-128, spécialement p. 9.

(²) *Comptes rendus*, 191, 1930, p. 1110-1112.

ce tenseur est en outre tel que

$$\mathcal{F}_\lambda G^\mu_j(X, \Xi) = 0, \qquad \mathcal{G}^\mu G^j_\lambda(X, \Xi) = 0,$$

la seconde opération portant sur Ξ.

En se donnant des tenseurs (f_λ), (φ_λ), on peut ramener ainsi exactement à des systèmes d'équations de Fredholm : le problème de M. Picard (¹), consistant à trouver (u_λ) de façon que, sur toute la multiplicité,

$$\mathcal{F}_\lambda u_j = f_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m);$$

le problème de Dirichlet, celui de Neumann et des problèmes mixtes, où les conditions précédentes doivent avoir lieu dans $\mathcal{D}$, pendant que sur $\mathcal{S}$ on exige

$$u_\lambda = \varphi_\lambda \quad \text{ou} \quad \Theta_\lambda u_j = \varphi_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

On traite de même des questions relatives à un nombre quelconque d'inconnues, scalaires et tenseurs d'ordres quelconques (²).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur quelques propriétés qualitatives de la propagation de la chaleur.* Note (³) de MM. **G. Pólya** et **G. Szegö**, transmise par M. Hadamard.

Nous nous sommes proposé la tâche de démontrer analytiquement certaines propriétés de la propagation de la chaleur qui sont plus ou moins évidentes du point de vue physique, mais qui n'ont pas encore été démontrées, semble-t-il, en partant de l'équation de Fourier. Voici quelques exemples.

1. *La température maximum d'un corps solide de dimensions finies est une fonction décroissante du temps, si elle est supérieure à la température du milieu ambiant.*

Dans la démonstration, nous supposons que le corps est homogène et isotrope, que la température du milieu ambiant est = 0 et nous ferons sur

---

(¹) M. Picard a traité une question analogue pour un scalaire inconnu (*Ann. Éc. Norm.*, 26, 1909, p. 9 à 17).

(²) Voir *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 471-473.

(³) Séance du 26 mai 1931.

l'état de la surface limitant le corps une des trois hypothèses suivantes :

$$\text{(I)} \qquad U = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = hU;$$

U désigne la température, n la normale intérieure, $h > 0$. Nous pourrions même admettre que la surface est divisée en trois portions, sur chacune desquelles une autre condition, (I), (II) ou (III), est remplie.

En appliquant la formule de Green aux fonctions U et $e^{\lambda U} - 1$, où λ est une constante positive, nous obtenons

$$\iiint \left\{ (e^{\lambda U} - 1)\,\Delta U + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] \lambda e^{\lambda U} \right\} dv + \iint (e^{\lambda U} - 1) \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

La dernière intégrale s'évanouit, si la condition à la surface est (I) ou (II). Si nous admettons l'hypothèse (III) et utilisons l'équation de la propagation intérieure, notre formule devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint (e^{\lambda U} - \lambda U)\, dv = - a^2 \lambda^2 \iiint \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] e^{\lambda U}\, dv - a^2 \iint h (e^{\lambda U} - 1) \lambda U\, d\sigma.$$

Le second membre est négatif, vu que $(e^x - 1)x \geq 0$ si x est réel. Ainsi l'intégrale du premier membre décroît Le maximum de l'intégrale est atteint dans le voisinage du maximum de U, pourvu que ce dernier soit positif et λ suffisamment grand. C'est ce voisinage qui fournit l'élément prédominant de l'intégrale; d'où l'on voit que le maximum de U ne peut pas augmenter (C. Q. F. D.). Si l'on n'admet que les conditions (I) et (III), on peut donner une démonstration immédiate en se basant sur un résultat de E. E. Levi (*Annali di Mat.*, 3e série, 1, 1908, p. 194-197). Pour un solide illimité, on peut montrer, en se servant de la forme explicite de l'intégrale, que non seulement le maximum de la température, mais aussi le maximum du gradient de la température décroît avec le temps (il y a une restriction concernant l'allure à l'infini).

2. *Si la chaleur se propage le long d'une droite homogène infinie, ni le nombre des changements de signe ni celui des extréma de la température ne*

peuvent augmenter avec le temps. Nous avons démontré cet énoncé en faisant une restriction légère sur l'allure de la distribution initiale à l'infini. Le cas des zéros de la température sur un segment de droite fini, homogène ou inhomogène, a été traité par Sturm (*Journal de Math.*, 1, 1836, p. 413-431); nous avons trouvé une nouvelle démonstration de son résultat principal. Ajoutons que la partie du théorème énoncé, qui se rapporte au nombre des extréma, ne peut pas être étendue au cas du plan infini.

3. L'énoncé du n° 2 découle immédiatement de la forme connue de l'intégrale et d'une extension de la règle des signes de Descartes, donnée par Laguerre. Voici une nouvelle règle des signes qui peut rendre des services analogues, lorsque la distribution de la température possède la symétrie des cercles ou des sphères concentriques : *Soient* $G(z)$ *une fonction entière dont tous les coefficients sont réels et non négatifs et* $\varphi(x)$ *une fonction de la variable positive* x *qui change* V *fois de signe. Alors la fonction représentée par l'intégrale*

$$\int_0^\infty G(xu)\varphi(u)\,du$$

sur un certain segment de l'axe réel y admet V *zéros au plus.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'inversion des transformations continues de deux variables.* Note [1] de M. S. Stoilow, transmise par M. Hadamard.

1. Supposons qu'une transformation, univoque du plan π au plan π', satisfasse aux conditions suivantes :

1° Elle est continue dans tout π à distance finie;

2° Au voisinage de tout point de π, elle est localement biunivoque;

3° A tout chemin allant à l'infini dans π, correspond dans π' un chemin de la même espèce.

Dans ces conditions, M. Hadamard a démontré [2] que la transformation est biunivoque dans tout π et qu'elle transforme π en π'.

---

[1] Séance du 26 mai 1931.

[2] J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 34, 1906, p. 71. La forme donnée à la condition 3° par M. Hadamard est un peu différente de celle de plus haut. Équivalentes dans le cas des transformations envisagées ici, ces deux formes de la condition 3° ne le sont pas dans le cas plus général que nous donnons plus loin.

Je me propose de montrer ici comment les propriétés des *transformations intérieures* (1) permettent facilement d'arriver à une généralisation assez large du théorème de M. Hadamard (au moins dans le cas envisagé ici de deux dimensions).

2. Considérons une transformation intérieure ($\mathcal{J}$) d'une région (2) sphérique (r) qui se trouve ainsi représentée sur une région (R) d'une autre sphère. La proposition que nous allons établir est la suivante :

Si l'image dans (R) *de tout chemin qui tend vers la frontière de* (r) *est un chemin tendant vers la frontière de* (R) : *l'ordre de connexion* (3) *de* (R) *est au plus égal à celui de* (r) *et tout point de* (R) *est l'image du même nombre de points de* (r), *distincts ou confondus* (4) (*ce nombre étant d'ailleurs fini*).

Soient (f) et (F) les frontières de (r) et de (R) respectivement. Étant donnés deux chemins quelconques qui tendent vers le même élément de (f) il est facile de construire un troisième chemin dont l'image doit tendre vers le même élément de (F) que l'image de chacun des chemins précédents. Tous les chemins qui tendent vers un même élément de (f) ont donc des images tendant vers le même élément de (F).

Soit, d'autre part, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ une suite de points de (R) tendant vers un point quelconque K de (F). Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots$ des points de (r) ayant respectivement pour images $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Tout point limite des β est sur (f). Comme on peut faire passer par les β un chemin qui tende vers (f), on voit que *tout* K est un point limite pour un certain chemin tendant vers (f). Le nombre des éléments de (F) ne peut donc dépasser celui des éléments de (f).

Pour établir la seconde partie de la proposition énoncée rappelons un théorème démontré dans le Mémoire cité (p. 363) qui, appliqué à la transformation ($\mathcal{J}$), laquelle par hypothèse est dénuée de valeurs asymptotiques, s'exprime ainsi : quel que soit l'arc simple (A, B) dans (R), il existe au

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, 45, 1928, p. 347. Ce sont les transformations continues qui ont pour invariants le *point intérieur* et le *continu*.

(2) Domaine ouvert.

(3) Nombre des *éléments* (continus distincts ou points isolés) qui constituent la frontière de la région.

(4) Du point de vue de l'inversion locale, les transformations intérieures se comportent comme les fonctions holomorphes d'une variable complexe (*loc. cit.*, p. 372). On peut donc parler de points « confondus » qui ont même image. Nous appellerons *points de ramification* les points autour desquels la transformation n'est pas localement biunivoque.

moins un arc simple dans (r) partant d'un point quelconque de (r) qui a pour image le point A et se transformant, d'une manière biunivoque, en (A, B).

Les points de ramification de $(\mathcal{J})$ étant isolés et $(\mathcal{J})$ satisfaisant, en plus, à l'hypothèse de l'énoncé, les images de ces points sont également isolées. On peut donc prendre (A, B) tel qu'il ne passe par aucune de ces images et la seconde partie de notre proposition se déduit alors immédiatement du théorème rappelé.

3. Appliquée aux transformations envisagées au n° 1, la proposition du n° 2 fournit le théorème de M. Hadamard : 1° (r) est le plan entier ou, ce qui revient au même, la sphère pointée. La première partie de notre proposition permet donc d'affirmer que (R) est à connexion simple; 2° la transformation n'a pas de points de ramification; donc, puisque (R) est à connexion simple, la transformation est biunivoque dans tout (r); 3° tout chemin allant au point qui représente l'infini sur la sphère se transforme en un chemin allant à un point déterminé sur l'autre sphère. Ce point est alors le seul point frontière de (R) et cette région est, comme (r), la sphère pointée.

En abandonnant l'une des hypothèses 2° ou 3°, on obtient des cas intermédiaires.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur un système d'équations fonctionnelles.* Note [1] de M. **Gr. C. Moisil**, transmise par M. Hadamard.

Considérons l'intégrale de Cauchy

$$\int_C f(z)\,dz = F(C); \tag{1}$$

F(C) est une fonction additive de lignes planes. Si l'on suppose que F(C) est une fonction absolument continue du domaine D limité par C, on a

$$\int_C f(z)\,dz - \iint_D \varphi(v)\,d\omega = 0. \tag{2}$$

Ce cas a été étudié par M. N. Théodoresco [2] qui dans une Thèse

[1] Séance du 26 mai 1931.

[2] N. Théodoresco, *La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique mathématique*, p. 47 et suiv. (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

récente a montré que si $\varphi(v)$ est bornée l'intégrale de M. D. Pompeiu

$$(3) \qquad g(z)=\frac{1}{2i\pi}\int\int_D \frac{\varphi(v)}{z-v}\,d\omega$$

est une solution de (2). Mais $\varphi(v)$ peut ne pas être bornée et F(C) n'est pas toujours une fonction absolument continue de D.

Nous supposerons que F(C) est à variation bornée et n'a que des discontinuités de première espèce. On sait qu'il existe une fonction additive d'ensembles mesurables B, $\Phi(e)$, telle que pour toute courbe C pour laquelle F(C) est continue, on ait

$$(4) \qquad F(C)=\Phi(D).$$

L'intégrale

$$(5) \qquad g(z)=\frac{1}{2i\pi}\int\int_D \frac{d\Phi(e)}{z-v}$$

est solution de l'équation fonctionnelle (1). Cette remarque généralise les résultats de M. G. Evans [1]. Pour la justifier nous avons employé la méthode même de M. Evans, en nous basant sur le changement de l'ordre d'intégration

$$\int_C dz\int\int_D \frac{d\Phi(e)}{z-v}=\int\int_D d\Phi(e)\int_C \frac{dz}{z-v}.$$

L'observation ci-dessus peut être étendue aux systèmes d'équations intégrales dans un espace à m dimensions

$$(6) \qquad \int_\Sigma (n.\gamma)\,f\,d\sigma=F(\Sigma)$$

où $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ sont des matrices qui satisfont aux relations [2]

$$(7) \qquad \bar\gamma_h\gamma_k+\bar\gamma_k\gamma_h=\gamma_h\bar\gamma_k+\gamma_k\bar\gamma_h=2\,\delta_{hk}e.$$

En employant les fonctions de domaine $\Phi(\Omega)$ qui, pour toutes les surfaces Σ pour lesquelles $F(\Sigma)$ est continue, donnent

$$(8) \qquad \Phi(\Omega)=F(\Sigma),$$

---

(1) G. Evans, *Fundamental points of potential theory* (*Rice Instit. Pamphlet*, 7, 1929, p. 252).

(2) Gr. C. Moisil, *Sur les systèmes d'équations de Dirac du type elliptique* (*Comptes rendus*, **191**, 1930, p. 1192).

nous avons montré que sous les mêmes hypothèses que dans le cas plan l'*intégrale*

(9) $$g_P = \frac{1}{s_m}\int_\Omega \frac{(\overrightarrow{MP}.\bar{\gamma})}{\overline{MP}^m}\, d\Phi(e_M)$$

est une solution du système (6)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une remarque sur les singularités des séries de Dirichlet.* Note de M. N. **Aronszajn**, présentée par M. Hadamard.

M. V. Bernstein, dans sa Thèse ([1]), a introduit la notion de la droite d'holomorphie $\sigma = h$ ($s = \sigma + it$) d'une fonction

(1) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \to \infty).$$

L'abscisse h, dite abscisse d'holomorphie, est la borne inférieure de tous les x (réels) pour lesquels la fonction $f(s)$ est prolongeable dans tout le demi-plan $\sigma > x$. Il peut arriver que h soit plus petit que l'abscisse de convergence de la série (1).

D'après un théorème de M. V. Bernstein ([2]), si la suite $\{\lambda_n\}$ est de densité maximum finie ([3]), la fonction $f(s)$ possède nécessairement un point singulier sur la droite d'holomorphie. Les suppositions de ce théorème excluant une grande classe de séries de Dirichlet, parmi lesquelles se trouvent même les séries de Dirichlet proprement dites (où l'on a $\lambda_n = lgn$), il est naturel d'essayer d'étendre le théorème mentionné aux suites $\{\lambda_n\}$ de densité maximum infinie.

Nous allons construire pour chaque suite $\{\lambda_\nu\}$ remplissant

(2) $$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \to \infty, \qquad \lim_{n=\infty}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$$

une fonction

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

([1]) *Rendic. del R. Instit. Lombardo...*, 2e série, 63, VI-X, p. 4.

([2]) *Loc. cit.*, p. 77.

([3]) On dit d'après M. G. Polya (*Math. Zeitsch.*, 29, 1929, p. 559) qu'une suite $\{\lambda_n\}$ est mesurable et de densité D lorsque $\lim_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = D$. La densité maximum d'une suite $\{\lambda_n\}$ non mesurable est la borne inférieure des densités de suites mesurables contenant la suite $\{\lambda_n\}$.

satisfaisant à la condition

(3) Aucun point singulier de $f(s)$ n'est situé sur sa droite d'holomorphie.

Ceci prouve l'impossibilité de l'extension du théorème de M. Bernstein aux séries (1) dont les suites $\{\lambda_n\}$ remplissent (2) et en particulier aux séries de Dirichlet proprement dites.

Voici d'abord un exemple très simple d'une fonction remplissant (3) :

$$(4)\qquad f_0(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k e^{-ks}}{1 + e^{-\frac{1}{k^2} - \frac{s}{k}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-ks} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m e^{-\frac{m}{k^2} - \frac{ms}{k}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(0)} e^{-\lambda_n s},$$

où $\{\lambda_n\}$ est la suite formée de tous les nombres $\left(k + \frac{m}{k}\right)$ pour k, m naturels, $A_n^{(0)} = \Sigma(-1)^m \alpha_k e^{-\frac{m}{k^2}}$ la somme étendue à tous les couples (k, m) avec $k + \frac{m}{k} = \lambda_n$.

Les coefficients α_k doivent être choisis de manière que tous les développements et transformations indiqués dans (4) soient possibles. Il suffit pour cela de prendre $\alpha_k \leq \frac{1}{k!}$; on vérifiera immédiatement que la fonction $f_0(s)$ possède comme points singuliers seulement des pôles simples $-\frac{1}{n} - \pi n(2k+1)i$ dont aucun n'est sur sa droite d'holomorphie $\sigma = 0$.

Pour une suite $\{\lambda_n\}$ quelconque satisfaisant à (2), on procédera de la manière suivante : on extraira, pour $k = 1, 2, \ldots$ de la suite $\{\lambda_n\}$ une suite $\{\lambda_n^{(k)}\}_{n=1,2,\ldots}$ avec

$$(5)\qquad \lambda_n^{(k)} < \lambda_{n+1}^{(k)}, \qquad \lim_{n=\infty} (\lambda_{n+1}^{(k)} - \lambda_n^{(k)}) = \frac{1}{k}.$$

On peut obtenir une telle suite en prenant, pour chaque segment $\left[\frac{m}{k}; \frac{m+1}{k}\right]$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, le premier terme λ_n (s'il existe) contenu dans ce segment.

On posera

$$C_k(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\lambda_\nu^{(k)})^2}\right), \qquad f_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^{(k)} s}}{C'_k(\lambda_n^{(k)})},$$

et enfin

$$(6)\qquad f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k\left(s + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_m^{(k)}\left(s + \frac{1}{k}\right)}}{C'_k(\lambda_m^{(k)})} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n s}.$$

Certains des coefficients A_n peuvent s'annuler (on pourrait aussi s'arranger pour que tout $A_n \neq 0$).

Pour rendre possibles les développements (6), il suffit de prendre les α_k tels que

$$\frac{1}{\alpha_k} \geqq \text{max. de } 2^k |f_k(s)|$$

$$\text{pour } \sigma = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad |t| \geqq \frac{k\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad -k \leqq \sigma \leqq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad t = \pm \frac{k\pi}{2},$$

$$\text{ou bien} \quad \sigma = -k \quad \text{et} \quad |t| \leqq \frac{k\pi}{2};$$

$$\frac{1}{\alpha_k} \geqq 2^k \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{C_k(\lambda_n^{(k)})} \right| e^{\frac{-\lambda_n^{(k)}}{k}}.$$

La fonction définie par (6) est la fonction cherchée remplissant (3).

Pour le démontrer, on s'appuiera sur les résultats de M. Bernstein (voir sa Thèse); d'après lesquels : 1° les fonctions $f_k(s)$ sont holomorphes dans le demi-plan $\sigma > 0$ et la bande $\sigma \leqq 0$; $|t| < k\pi$; 2° elles possèdent les points singuliers $\pm k\pi i$. En outre $f_k(s)$ a l'abscisse de convergence absolue O.

Remarquons que les suites $\{\lambda_n\}$ soumises à la condition (2) sont de densité infinie; cependant elles n'épuisent pas la classe de toutes les suites $\{\lambda_n\}$ de densité infinie.

Pendant la rédaction de cette Note, M. V. Bernstein a bien voulu me faire savoir que le même procédé s'applique à toutes les suites $\{\lambda_n\}$ desquelles on peut extraire une infinité de suites partielles $\{\lambda_n^{(k)}\}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $\{\lambda_n^{(k)}\}$ a une densité maximum $D_k < \infty$ avec $\lim\limits_{k=\infty} D_k = \infty$;

2° $\varliminf\limits_{n=\infty} \dfrac{n}{\lambda_n^{(k)}} = d_k \geqq \alpha D_k$ avec $\alpha > 0$ indépendant de k;

3° Les δ relatifs à chacune des $\{\lambda_n^{(k)}\}$ (1) sont bornés dans leur ensemble.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *De l'intégration d'une équation de la première classe.* Note de M. R. Gosse, présentée par M. E. Goursat.

Dans le cas très important où une équation du second ordre peut s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad \frac{d\,a(x, y, z, p)}{dy} = ab(x, y, z, q) + b_1(x, y, z, q),$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une involution d'ordre 2

(1) Pour la définition de δ, voir Bernstein, *loc. cit.*, p. 79 et suiv.

est qu'il y ait une fonction $u(x, y, z, p)$ telle que

(2) $$\frac{\partial u}{\partial y} = ub + a\,\mathrm{H}(b) + \mathrm{H}(b_1).$$

S'il y a une autre involution d'ordre n supérieur à 3, il existe, ou bien une fonction $\sigma(x, y, z, p)$ telle que

(3) $$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \mathrm{H}(b) + b_2(x, y, z, q)$$

ou bien une fonction $\tau(x, y, z, p)$ telle que

(4) $$\frac{\partial \tau}{\partial y} + b\mathrm{X} + \mathrm{X}_1\mathrm{H}(b) + \mathrm{H}_2(b) = \mathrm{F}(b)\frac{\mathrm{H}(a) - u}{\dfrac{\partial a}{\partial p}},$$

et le problème de la discussion simultanée de 2 et 3 ou de 2 et 4 ne paraît présenter que des difficultés de calcul.

Si la seconde involution est d'ordre 3, le groupe de deux conditions — nécessaires et suffisantes dans ce cas — se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial y}\sigma(x, y, z, p) = \mathrm{H}(b) - b\,\mathrm{X}(x),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\rho(x, y, z, p) = b(\rho + a\mathrm{X}) - \sigma b_1 + \mathrm{H}(b_1).$$

En étudiant un cas particulier de la discussion à laquelle il conduit, j'ai été amené à intégrer toute une catégorie d'équations de la première classe, dont fait partie l'équation

$$s(x+y)\lambda = 2k(x+y)^2(p\sqrt{q} + q\sqrt{p}) + 2pq(x+y)^4 + 2\sqrt{pq}\left[\frac{k^2}{3} - 2z(x+y)^3\right]$$

où

$$\lambda = (x+y)^3 z + \frac{k^2}{3},$$

que M. Lainé a signalée à la fin de sa Thèse (1).

Pour cette équation, il suffit de considérer la transformation de Bäcklund

$$\mathrm{X} = x, \quad k(x+y)\sqrt{p} = \mathrm{Q}\lambda - \frac{k^2}{x+y},$$
$$\mathrm{Y} = y, \quad k(x+y)\sqrt{q} = \mathrm{P}\lambda - \frac{k^2}{x+y},$$

(1) LAINÉ, *Thèses de Doctorat*, Cracovie, Imprimerie de l'Université, 1928, p. 95.

pour obtenir, en éliminant P et Q, l'équation de M. Lainé. Si l'on élimine p, q, z et qu'on pose $z_1 = e^{-z}$, on est ramené à l'équation

$$s_1 + \frac{2(p_1 + q_1)}{x + y} = 0,$$

et à une formule simple pour l'intégrale générale de l'équation de M. Lainé.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur quelques propriétés des fonctions uniformes au voisinage d'un point singulier essentiel isolé.* Note de M. **Florent Bureau.**

Dans cette Note nous nous proposons d'indiquer quelques propositions nouvelles relatives aux fonctions uniformes au voisinage d'un point singulier essentiel isolé.

1. Soit $f(x)$ une fonction admettant le point $x = a$, à distance finie ou infinie, comme point singulier essentiel isolé, au voisinage duquel elle est uniforme et régulière. Dans ces conditions on a le théorème suivant :

Si α et β sont deux nombres finis, dont le dernier β est différent de zéro, l'une au moins des équations

$$f(x) - \alpha = 0,$$
$$f^n(x) - \beta = 0 \qquad (n \geq 1),$$

où $f^n(x)$ désigne la dérivée d'ordre n, admet une infinité de racines au voisinage de $x = a$.

Supposons que la fonction $f(x)$ soit méromorphe dans tout le plan de la variable complexe x. Nous obtenons par le théorème précédent la généralisation suivante d'un théorème de Polya-Saxer [1] :

Si la fonction méromorphe $f(x)$ possède les valeurs exceptionnelles α et ∞, sa dérivée d'ordre n $(n \geq 1)$ ne peut avoir que 0 et ∞ pour valeurs exceptionnelles.

2. Pour une fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

holomorphe dans le cercle $|x| < 1$, nous avons le théorème suivant :

Soient les deux nombres α et β $(\beta \neq 0)$ tels que $\alpha \neq a_0$, $\beta \neq n!\,a_n$ $(n \geq 1)$;

---

[1] W. Saxer, *Ueber die Picardschen Ausnahmewerte sukzessiver Derivierten* (*Mathematische Zeitschrift*, 17, 1923, p. 210).

supposons que $f(x)-\alpha$ et $f^n(x)-\beta$ ne s'annulent pas à l'intérieur du cercle-unité et que $a_p \neq 0$, p étant un nombre entier, positif, supérieur à n.

Dans tout cercle de rayon r intérieur au cercle-unité, le module de $f(x)$ reste inférieur à un nombre qui s'exprime au moyen de α, β, a_0, a_n, a_p et r seulement.

En conséquence :

Soient

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots$$

une fonction holomorphe dans le cercle $|x|<R$ et deux nombres α, β ($\beta\neq 0$) tels que $\alpha\neq a_0$, $\beta\neq n!\,a_n(n\geqq 1)$. Supposons que $f(x)-\alpha$ et $f^n(x)-\beta$ ne s'annulent pas dans le cercle $|x|<R$ et que a_p soit $\neq 0$ $)p>n\geqq 1)$.

Si $p=n=1$, le rayon R du cercle $|x|<R$ est borné par un nombre qui s'exprime au moyen de α, β, a_0, a_n et a_{n+1} seulement.

Si $p>n+1$, il est possible de déterminer un nombre entier $q>p$, dépendant exclusivement de n et p, tel que, si $a_q\neq 0$, le rayon R du cercle $|x|<R$ est borné par un nombre qui s'exprime au moyen de α, β, a_0, a_n, a_p et a_q seulement.

Ces propositions permettent d'énoncer pour les fonctions holomorphes dans le cercle-unité le critère suivant de famille normale :

Une famille de fonctions $f(x)$, ne comprenant aucun polynome de degré $\leqq n$, holomorphes dans le cercle $|x|<1$, est normale dans ce cercle, dans les conditions suivantes :

1° *Étant donnés deux nombres α et β ($\beta\neq 0$), aucune des équations $f(x)-\alpha=0$, $f^n(x)-\beta=0\,(n\geqq 1)$, n'admet de racine dans le cercle $|x|<1$.*

2° *Les quantités $|a_0-\alpha|$ et $|n!\,a_n-\beta|$ sont bornées supérieurement et inférieurement par des nombres positifs valables pour toute fonction de la famille.*

3° *Il existe un nombre entier positif p, plus grand que n, tel que $\left|\frac{1}{a_p}\right|$ est borné supérieurement par un nombre positif, valable pour toute fonction de la famille.*

3. Enfin nous énoncerons le théorème suivant :

Soient $f_1(x)$, ..., $f_n(x)$, $n(n\geqq 2)$ fonctions transcendantes entières, n'ayant qu'un nombre fini de zéros, et $T(r)$ la plus grande des quantités [1] $T(r,f_1)$, ..., $T(r,f_n)$. *Considérons n fonctions méromorphes $\varphi_1(x)$, ...,*

---

[1] Introduites par M. R. Nevanlinna.

$\varphi_n(x)$, *telles que*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,\varphi_\nu)}{T(r)}=0 \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n).$$

Dans ces conditions l'identité

$$\varphi_1(x)f_1^{p_1}(x)+\ldots+\varphi_n(x)f_n^{p_n}(x)=1$$

(*où* $p_1, \ldots, p_n$ *désignent des nombres entiers positifs*) *est impossible si les fonctions* $\varphi_1(x)f_1^{p_1}(x), \ldots, \varphi_n(x)f_n^{p_n}(x)$ *sont linéairement indépendantes.*

CINÉMATIQUE APPLIQUÉE. — *Chaîne fermée à cinq couples rotoïdes, déformable au premier degré de liberté.* Note [1] de M. **F. E. Myard**, présentée par M. Maurice d'Ocagne.

En dehors des solutions banales de chaînes à cinq couples rotoïdes *parallèles*, et à cinq couples rotoïdes *concourants* sur un même sommet (et qui sont déformables au deuxième degré de liberté), on ne connaissait jusqu'à présent aucun exemple de chaîne fermée à cinq couples rotoïdes, déformable au premier degré de liberté.

La présente Note, ainsi que nous l'indiquions précédemment [2], va déceler l'existence d'une telle chaîne paradoxale (première solution ou chaîne n° 1).

Reprenons un tore défini, en projection oblique, par ses deux parallèles limites P_1, P_2, et son cercle générateur C. Étant donnée la propriété du plan bitangent, nous pouvons considérer le tore comme étant engendré par l'un ou l'autre des deux cercles contenus dans un plan bitangent quelconque, et tournant autour de l'axe OZ. En particulier, nous pouvons envisager le cercle A′ (qui est l'un des cercles d'intersection, avec le tore, du plan bitangent mobile, de trace T′) de centre Ω′, animé de ce mouvement de rotation autour de l'axe OZ, et dire qu'il rencontre constamment le cercle A en un point mobile S (qui, par conséquent, va se déplacer simultanément sur ces deux cercles A et A′).

Il s'ensuit que nous pouvons, *a priori*, réaliser un système articulé comprenant trois couples rotoïdes OZ, ΩX, Ω′X′ (ΩX et Ω′X′ étant normaux, respectivement, aux plans des cercles A et A′), et le couple sphérique S.

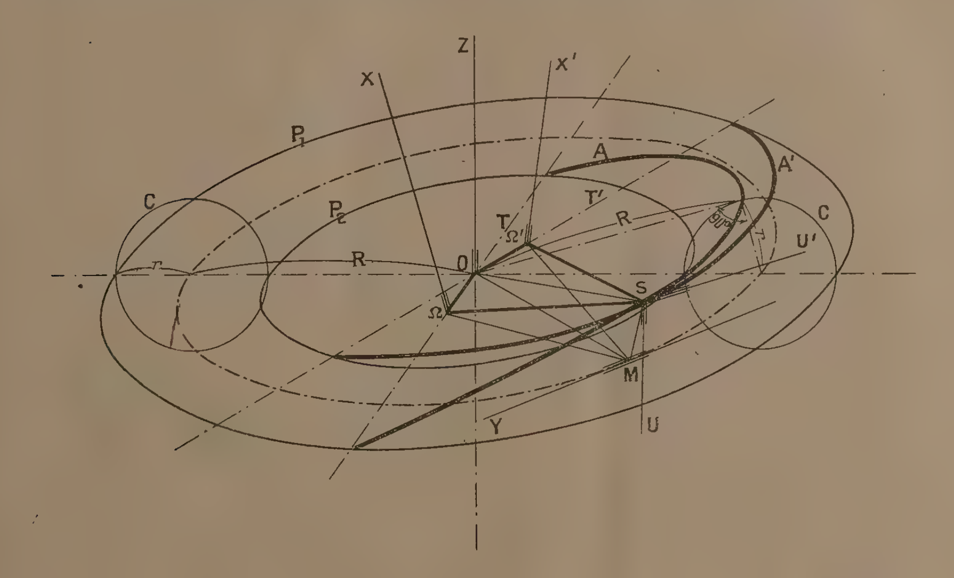
---

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) Voir *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1194.

En réalité nous allons montrer que le couple apparemment sphérique S se réduit à deux couples rotoïdes concourants.

En effet nous avons vu que le système articulé OΩSM était à 4 couples rotoïdes d'axes respectifs OZ, ΩX, SU et MY. Considérons donc la barre OM comme faisant partie du bâti. Si nous déformons l'isogramme OΩSM, le point Ω décrit un cercle autour de OZ (dans le plan moyen du tore) et le point S décrit un cercle d'axe MY et de plan normal au précédent.



Or, pareillement, nous pouvons considérer le système articulé OΩ'SM, à quatre couples rotoïdes d'axes respectifs OZ, Ω'X', SU' et MY (Ω'X' étant normal au plan du cercle A', et SU' étant normal au plan MSΩ').

Nous avons donc *deux systèmes de droites* (ou barres articulées) OΩSM et OΩ'SM, disposées toujours symétriquement par rapport au plan OSM, et *présentant, en commun, la liaison* OMS. Nous pouvons par conséquent supprimer cette liaison commune OMS. Il nous restera en S un couple rotoïde SU pour le système SΩO, et le couple rotoïde SU' pour le système SΩ'O (les deux axes SU et SU' étant symétriquement disposés par rapport au plan SMO et faisant chacun un même angle constant avec l'axe MY). Donc, au total, un système articulé à cinq couples rotoïdes.

La démonstration peut être faite plus géométriquement [1]. Considérant encore, dans le système articulé à quatre couples rotoïdes OΩSM, la barre OM comme étant le bâti, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant donnés deux cercles égaux de rayon r, et disposés perpendiculairement de manière que le plan de chacun contienne le centre de l'autre, la distance des centres étant R, si l'on assujettit une droite de longueur R à s'appuyer par ses extrémités sur ces deux cercles, cette droite engendre une surface réglée dont les génératrices sont constamment normales aux génératrices correspondantes et respectives de deux hyperboloïdes de révolution ayant les cercles donnés pour cercles de gorge, les cônes directeurs correspondants ayant un demi-angle au sommet de valeur k défini par $\sin k = \frac{r}{R}$.

Considérant le deuxième système articulé OΩ′SM, nous voyons qu'il existe, pareillement, une surface réglée symétrique de la précédente (les plans des deux cercles formant deux plans de symétrie pour ces deux surfaces).

Donc, deux génératrices symétriques de ces deux surfaces réglées, telles que SΩ et SΩ′, sont constamment normales respectivement aux génératrices correspondantes de double génération définissant les deux hyperboloïdes précédemment nommés.

Donc SΩ peut être articulée, en S, par couple rotoïde sur la génératrice correspondante (et à laquelle elle est normale) de l'hyperboloïde d'axe MY (première génération). De même en Ω.

Pareillement, SΩ′ peut être articulée, en S, par couple rotoïde sur la génératrice correspondante (et à laquelle elle est normale) de l'hyperboloïde d'axe MY (deuxième génération). De même en Ω′. Les deux rayons OΩ, OΩ′ étant articulés suivant l'axe OZ, nous avons bien, au total, un système articulé à cinq couples rotoïdes.

Ce système articulé nous donne, dans l'espace et par rapport au système lui-même, les exemples (pouvant illustrer le théorème de Kempe-Kœnigs) : *a*. d'un point S décrivant un cercle ; *b*. d'une droite SM passant par un point fixe M et balayant un plan ; *c*. de droites SU, SU′ engendrant chacune un hyperboloïde.

Remarquons que cette chaîne à cinq articulations, produite par la réunion de deux systèmes articulés ayant une liaison commune, ou mieux résultant de la contraction de deux isogrammes symétriques, n'est possible que si ces isogrammes sont *rectangles*. Donc, dans *le cas général*, la réunion correspondante de deux mécanismes de Bennett identiques et symétriques, ne la donnerait pas (on aurait une chaîne déformable à six couples rotoïdes, deux à deux concourants).

---

(1) Prochainement, nous indiquerons, en plus d'une nouvelle démonstration de cette chaîne n° 1, une deuxième solution de chaîne à cinq couples (ou chaîne n° 2) également dérivée de l'isogramme rectangle. Et nous envisagerons aussi celles à six couples rotoïdes.

HYDRODYNAMIQUE. — *Sur l'application d'une méthode d'enregistrement à l'étude des tourbillons se produisant dans les liquides*. Note [1] de MM. E. **Crausse** et **J. Baubiac**, présentée par M. L. Lecornu.

La présente Note a pour objet l'exposé de l'application d'une méthode thermique à l'étude des tourbillons qui se produisent, dans divers liquides, à l'aval d'obstacles immergés. Cette méthode, déjà utilisée pour la détermination de la vitesse de l'eau ou de l'air, ainsi que pour l'étude des tourbillons dans l'air n'a, à notre connaissance, jamais été adaptée à celle des tourbillons dans les liquides. C'est son application à ce cas particulier que nous avons entreprise.

Ce procédé consiste en l'interposition, au point intéressant, d'un fil métallique fin, de résistance ohmique élevée et de fort coefficient de température parcouru par un courant. Toute variation de vitesse se produisant autour du fil modifie sa température et par suite, sa résistance. Le fil constitue l'une des branches d'un pont de Wheatstone préalablement équilibré. Chaque variation de vitesse est donc décelée par une variation correspondante de la déviation du galvanomètre, déviation qu'il est facile d'enregistrer.

La méthode est précieuse en ce sens que, comme il est exposé plus bas, elle permet l'étude de tourbillons ayant une période faible (de l'ordre de $\frac{1}{100}$ de seconde), pour lesquels, en raison même de la fréquence et des faibles dimensions de ces tourbillons, les méthodes habituelles d'étude sont en défaut.

I. *Application à l'étude des tourbillons alternés de Bénard-Kármán.* — Cette étude a été en partie réalisée par l'un de nous en collaboration avec M. P. Dupin [2]. Il suffit de placer le fil chaud dans le sillage de l'obstacle de façon que les tourbillons alternés viennent balayer ce fil; le diagramme de la figure 1 représente l'enregistrement de tourbillons alternés produits derrière un obstacle cylindrique à base circulaire de 5mm de diamètre, placé dans de l'eau animée d'un mouvement en bloc. La période des tourbillons déduite du diagramme est de 0,8 seconde. On remarquera la régularité de

---

(1) Séance du 18 mai 1931.

(2) P. Dupin, *Étude expérimentale sur les tourbillons alternés de Bénard* (*Thèse de doctorat*, 21 juin 1930, p. 20; Édouard Privat, Toulouse, et Gauthier-Villars, Paris, éditeurs).

cette période, ce qui prouve que, du moins dans certains cas, celle-ci est parfaitement déterminée.



Fig. 1. — Enregistrement de tourbillons alternés produits à l'aval d'un obstacle cylindrique de 5^{mm} de diamètre, placé dans un ajutage cylindrique de 30^{cm} de diamètre.

Une autre application permet la vérification de la similitude des tourbillons alternés successivement étudiés dans deux liquides de viscosité différente. On fait couler à cet effet, autour d'un cylindre de 10^{mm} de diamètre placé dans un ajutage carré de $4^{cm} \times 4^{cm}$, d'abord de l'eau puis une solution sucrée environ quatre fois plus visqueuse que l'eau. Les vitesses sont déterminées par jaugeage, les périodes enregistrées par l'intermédiaire du galvanomètre. Désignons par T_1, V_1, ν_1 la période des tourbillons,

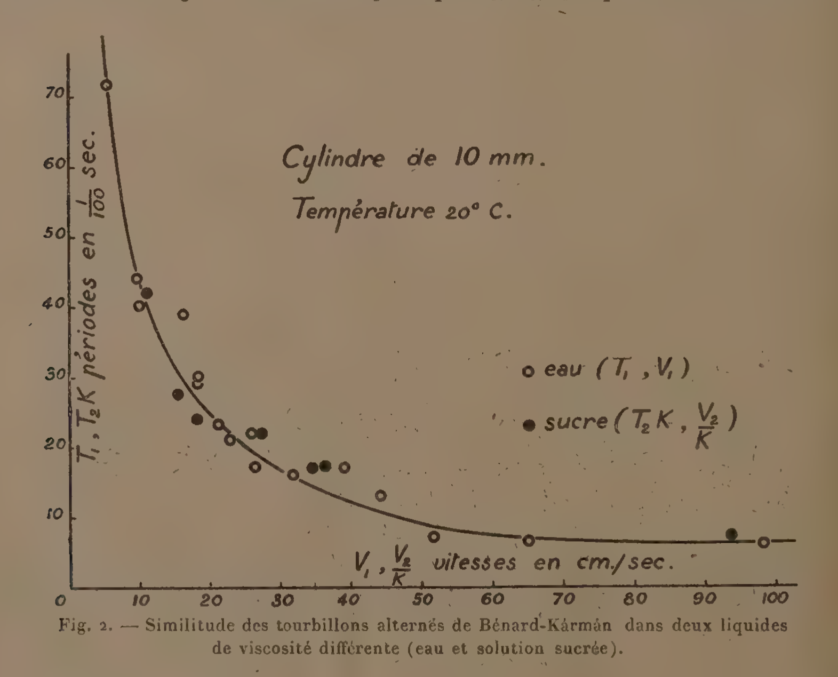


Fig. 2. — Similitude des tourbillons alternés de Bénard-Kármán dans deux liquides de viscosité différente (eau et solution sucrée).

la vitesse et le coefficient cinématique de viscosité de l'eau à 20°C., T_2, V_2, ν_2 les mêmes quantités pour la solution sucrée, $K = \frac{\nu_2}{\nu_1}$ le rapport des viscosités.

Les points (V_1, T_1), $\left(\frac{V_2}{K}, T_2 K\right)$ se disposent autour d'une même courbe moyenne (*fig.* 2), ce qui vérifie l'application de la loi de similitude de Reynolds au phénomène des tourbillons alternés, dans le cas de liquides de viscosité différente. Cette vérification avait antérieurement été faite par MM. P. Dupin et M. Teissié-Solier [1], mais pour des fréquences moins élevées et par des méthodes de mesure différentes.

2. *Application à l'étude des tourbillons secondaires.* — Ces tourbillons ont été décrits par M. J. Courrègelongue [2] et signalés par M. P. Dupin dans sa Thèse de doctorat. Ils apparaissent sous la forme d'une double chaîne le long du sillage de l'obstacle, ils sont de dimensions plus restreintes, et pour une même vitesse, de période plus courte que celle des tourbillons alternés. La méthode du fil chaud est également précieuse pour leur étude en raison même de leur nature et de leur fréquence. Le cliché de la figure 3 donne

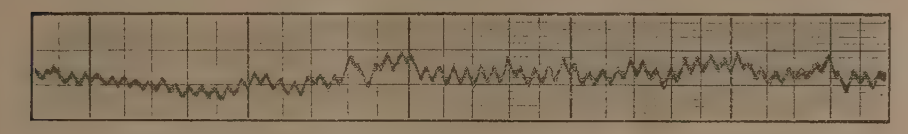


Fig. 3. — Enregistrement de tourbillons secondaires, produits à l'aval d'un obstacle cylindrique de 12mm de diamètre, placé dans un ajutage cylindrique de 30cm de diamètre.

l'enregistrement des périodes des tourbillons secondaires produits par un cylindre de 12mm de diamètre placé dans un champ de vitesses uniforme. Leur période est de $\frac{16,7}{1000}$ de seconde pour une vitesse de 58 cm/sec. On remarquera que la période de ces tourbillons est suffisamment régulière. D'autre part, la période déterminée par l'observation directe, quand celle-ci est possible, a été trouvée la même que celle obtenue par la méthode du fil chaud.

ASTRONOMIE STELLAIRE. — *Sur les mouvements d'ensemble des étoiles.* Note [3] de MM. **H. Mineur**, **Varchon**, **Barbier** et Mlles **Canavaggia**, **Chevallier** et **Roumens**, présentée par M. Ernest Esclangon.

1. Nous nous sommes proposé d'étudier les mouvements d'ensemble des étoiles en classant celles-ci en 19 groupes d'après leur catégorie spectrale et

(1) P. Dupin et M. Teissié-Solier, *Les tourbillons alternés* (Gauthier-Villars, 1928).

(2) *Comptes rendus*, 189, 1929, p. 972.

(3) Séance du 18 mai 1931.

leur distance au Soleil. Nous avons utilisé les 5500 vitesses radiales actuellement connues et pour chaque groupe nous avons calculé les coefficients du développement de la vitesse radiale moyenne en série de fonctions sphériques, jusqu'aux termes du troisième degré, par rapport aux cosinus directeurs α, β, γ :

$$\begin{aligned} V = k &+ a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma + 2b_1\beta.\gamma + 2b_2\gamma.\alpha + 2b_3\alpha.\beta + b_4(\alpha^2-\beta^2) \\ &+ b_5(2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2) + c_1(2\gamma^3-3\alpha^2\gamma-3\beta^2\gamma) + c_2(4\gamma^2\alpha-\alpha^3-\alpha\beta^2) \\ &+ c_3(4\gamma^2\beta-\beta^3-\beta\alpha^2) + c_4(\gamma\alpha^2-\gamma\beta^2) + 2c_5\alpha\beta\gamma + c_6(\alpha^3-3\alpha\beta^2) \\ &+ c_7(3\alpha^2\beta-\beta^3). \end{aligned}$$

La préparation numérique a été faite par Mlle Delaveau.

2. Les coefficients a_1, a_2, a_3 donnent la vitesse de translation du Soleil par rapport aux étoiles considérées. Nous avons constaté ainsi que cette vitesse ne dépend pas systématiquement du type spectral :

	a_1 km/sec.	a_2 km/sec.	a_3 km/sec.	Erreur moyenne km/sec.	Apex A.	Apex D.	Vitesse du Soleil km/sec.
					h m	°	
Géantes G, K, M.	−14,7	−6,7	−5,9	±0,4	18 7	+31	17,0
Étoiles B......	−17,9	−10,2	−3,4	±0,5	19 4	+30	21,7
» A......	14,7	−4,6	−7,6	±0,8	17 35	+26	17,3
» F......	−17,5	−5,6	−7,5	±0,7	17 51	+25	19,8
Naines G, K, M..	−14,1	−10,1	−2,9	±1,0	19 15	+35	17,6

En particulier, il est inexact que les étoiles F et les naines des types G, K, M donnent pour vitesse du Soleil une valeur très différente des autres étoiles. La vitesse d'ensemble de ces astres ne manifeste donc pas le courant asymétrique de Strömberg. Les étoiles dont la vitesse résiduelle dépasse 63 km/sec étaient exclues.

De même la déclinaison de l'apex par rapport aux étoiles géantes des types G, K et M n'est pas plus élevée que pour les autres types, comme on l'avait affirmé souvent.

3. Dans chaque groupe les étoiles étaient réparties dans 96 régions de la sphère céleste, classées elles-mêmes en 8 zones de latitude galactique. Nous avons profité de cette circonstance pour déterminer la vitesse du Soleil en classant les étoiles d'après leur cote z au-dessus du plan parallèle au plan galactique mené par le Soleil.

Nous avons cherché ainsi à vérifier l'existence du second courant asymétrique :

Les étoiles du type F ne montrent nullement ce phénomène; on constate seulement une notable diminution de la composante X de la vitesse solaire lorsque z varie de -100 à $+200$ parsecs, tandis que la composante Y ne

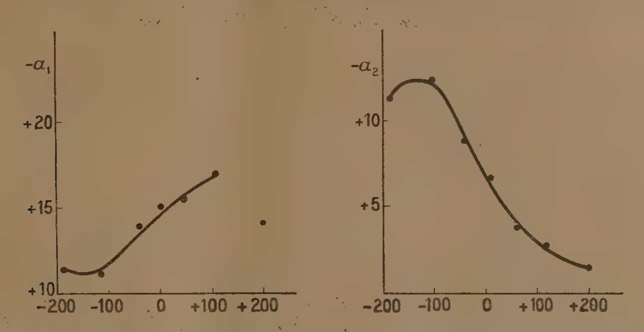


Fig. 1. — Abcisses : distance en parsecs au plan galactique mené par le Soleil. Ordonnées : composantes $-a_1$ et $-a_2$ de la vitesse du Soleil par rapport aux étoiles géantes de type G, K et M de cote z (en km/sec).

varie pas. Pour les étoiles B, le phénomène apparaît un peu; il est beaucoup plus visible pour les étoiles A et il est d'une netteté remarquable pour les géantes rouges, comme le montrent les figures ci-jointes.

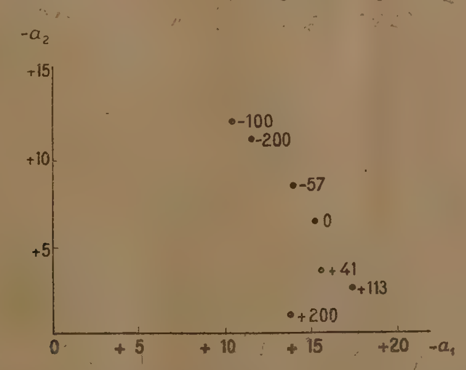


Fig. 2. — La figure représente en projection sur le plan galactique l'extrémité du vecteur vitesse du Soleil par rapport aux étoiles géantes des types G, K et M. Les nombres inscrits à côté des points donnent la cote moyenne z des étoiles qui ont servi à la détermination de cette vitesse. On remarque la tendance des points à se placer sur une ligne droite dont la direction a pour longitude 306°.

On remarque que la variation des composantes $-a_1$ et $-a_2$ de la vitesse du Soleil en fonction de z semble changer de sens pour $z = -120$, cette cote serait donc celle du plan de symétrie de l'univers galactique. Si l'on

interprète ce résultat par une rotation différentielle, la longitude du centre de rotation serait environ 220°.

4. Les coefficients b'_3 et b'_4 traduisent la rotation différentielle de Oort; voici pour chaque catégorie spectrale la longitude l_0 du centre et le coefficient A de Oort :

	$100.b_3$.	$100.b_4$.	l_0.	100.A.
Géantes G, K, M.....	$+0,2\pm0,3$	$+1,8\pm0,3$	$317°\pm6°$	$+1,8\pm0,3$
Étoiles B............	$+1,4\pm0,3$	$+1,0\pm0,3$	342 ± 11	$+1,7\pm0,3$
» A............	$+0,7\pm0,7$	$+0,2\pm0,7$	354 ± 40	$+0,7\pm0,7$
» F............	$+5,8\pm0,7$	$+2,9\pm0,7$	347 ± 5	$+6,4\pm0,7$

b_3, b_4 et A sont exprimés en km (sec)$^{-1}$.(parsecs)$^{-1}$, l_0 est défini à un multiple près de 90°; on a choisi la solution qui donne pour A une valeur positive.

On remarque que la valeur de A trouvée au moyen des étoiles B et géantes rouges est voisine de celle qui a été obtenue par Oort et Plaskett. Par contre les étoiles F donnent pour A une valeur notablement plus élevée, ce résultat, s'il est confirmé, est incompatible avec la possibilité d'un centre de rotation très éloigné.

ASTRONOMIE. — *Nouvelle contribution à l'étude de la réduction des clichés photographiques.* Note [1] de M. J. **Renaux**, présentée par M. Ernest Esclangon.

Dans son travail sur les parallaxes stellaires, Schlesinger a ramené, par la méthode des moindres carrés, la détermination des coordonnées rectilignes d'un astre à celles d'un centre de forces parallèles. D'autres astronomes ont cherché à utiliser avec la *plus grande généralité* les formes analytiques de Schlesinger qui se prêtent mal aux interprétations géométriques. La méthode de la distribution des triangles m'a conduit à rejeter l'emploi des « dépendances » et à établir des résultats que je complète. Pour une plus facile compréhension de cette Note, on peut se reporter à un travail antérieur sur le même objet (*Journal des Observateurs*, 30 septembre 1930). Les formes symétriques peuvent être combinées (*J. O.*, remarque *c*); mais pour le choix des coefficients, j'utilise la *composition des substitutions linéaires*, avec les premiers membres des relations (30 *bis*). Sans spécifier

[1] Séance du 26 mai 1931.

abscisses ou ordonnées, soit (ζ_l) une des quantités $x_l^c + l_p - x_l$, $y_l^c + m_p - y_l$; c'est une forme linéaire des coordonnées x_l, y_l. Faisant l'application à une étoile de repère de ζ_i déterminé, la différence $\zeta_i - (\zeta_i)$ est un *résidu de représentation* et j'étudie des solutions pour lesquelles la *somme des résidus de représentation est nulle*.

Soient r points de repère d'indices 1, 2, ..., r; la ligne polygonale fermée 12...r1, dite enceinte (moins restrictive que celle du JO); $n-r$ $(n \geq r)$ autres points de repère; un point quelconque d'indice q; la distribution D(12q) où q est fixe et où les autres indices sont permutés circulairement. La somme $\Sigma(12q)$ des doublés des aires des triangles, *indépendante du point* q, *définit le total* T *de l'enceinte*. La relation (35) du JO où les R sont remplacés par les ζ donne une solution S_q relative à une étoile repère d'indice q. Si, pour la distribution on forme la partie homogène en x_l, y_l dans la *composition des substitutions, elle ne dépend que des points de l'enceinte, véritable système de référence pour les autres repères*. C'est une simplification importante, pour les calculs surtout, si l'enceinte est un quadrilatère ou un triangle. Il est facile de supprimer ou d'introduire des repères n'appartenant pas à l'enceinte. On trouve pour la distribution considérée

$$\text{(1)} \qquad T(\zeta_l) = TS_q - \Sigma[(lr) + 2l]\zeta_l;$$

la somme Σ s'étendant à tous les termes obtenus par permutations circulaires, l étant fixe. Si l'on désigne par S_e la moyenne des r solutions relatives aux sommets de l'enceinte, par S la moyenne des n solutions, on a

$$S = S_e + \sum_{k=r+1}^{k=n} \frac{S_k - S_e}{n}.$$

Composant toutes les relations (1), remplaçant l par l'indice i d'une « repère », on a $\zeta_i - (\zeta_i) = S_i - S$ et *la somme des résidus de représentation est nulle*. Les quantités $S_{r+1} - S_e, \ldots, S_n - S_e$ sont des résidus composés de groupes par unité d'aire qui renseignent sur la précision avec laquelle chacune des étoiles de repère n'appartenant pas à l'enceinte se comporte par rapport à elle.

On peut envisager également les distributions D$(1, s+1, q)$ où $2s < r$. Elles sont respectivement relatives aux lignes polygonales étoilées de l'enceinte choisie et le théorème sur les résidus de représentation leur est applicable. Il subsiste pour les combinaisons linéaires des solutions S relatives à ces

lignes qui constituent une enceinte multiple. Le choix des coefficients se fait ainsi. Dans *les substitutions résultantes*, les coefficients des termes en x_i, y_i sont des fractions dont le dénominateur (le total) est une forme bilinéaire des coordonnées x, y des sommets de l'enceinte, les numérateurs sont, le premier une forme bilinéaire par rapport aux ζ et y de l'enceinte, le second une forme bilinéaire des ζ et x, et l'on est conduit à la réduction des formes bilinéaires. On introduit r formes linéaires

$$F_1(\zeta) = \zeta_r - \zeta_2 + \alpha(\zeta_{r-1} - \zeta_3) + \beta(\zeta_{r-2} - \zeta_4) + \ldots$$

les autres se déduisant par permutations circulaires des indices et l'on cherche les conditions pour qu'elles se réduisent à deux. La détermination des coefficients α, β, γ, ... se ramène à l'étude de l'équation binome $x^r - 1 = 0$ et des propriétés des polygones réguliers convexes ou étoilés. Les substitutions ont des formes simples, généralisation des résultats naturels pour le quadrilatère ou le triangle.

La réduction des formes bilinéaires s'étend également à certaines formes non symétriques et l'on peut obtenir ainsi des solutions qui, pratiquement, sont très rapides. Je me réserve de revenir sur ces questions et leurs applications dans un travail étendu qui paraîtra ailleurs.

ASTRONOMIE. — *Proximités d'orbites cométaires et de l'orbite de Pluton.* Note de M. G. Fayet, présentée par M. Ernest Esclangon.

Abstraction faite des astres à période assez courte pour que la distance aphélie soit nettement inférieure à la distance périhélie de Pluton, la recherche actuelle embrasse toutes les comètes apparues de 1680 à 1930, dont les éléments paraissent assez bien déterminés. On a examiné ainsi 241 orbites [97 ellipses et 144 paraboles ou très légères hyperboles] dont 177 sont regardées comme définitives.

Un procédé graphique a permis d'effectuer une première discrimination et de rejeter déjà 152 orbites qui ne peuvent pas s'approcher à une faible distance de l'ellipse décrite par la nouvelle planète. On s'est donc borné à rechercher, par le calcul, les proximités minima concernant les 89 orbites cométaires retenues après cette première élimination.

Il s'agit naturellement d'une étude approchée : on néglige complètement les actions perturbatrices et, en outre, il est illusoire de prétendre déterminer avec précision, dans une région très éloignée du périhélie, les coordonnées d'un point appartenant à une orbite cométaire sensiblement para-

bolique dont les éléments sont déduits de quelques mois d'observations. On a donc pu admettre, en vue de simplifier les calculs, que la distance minima de 2 orbites répondait à des points respectifs ayant même longitude héliocentrique λ.

En ne conservant, comme susceptibles de présenter quelque intérêt, que les proximités d'orbites pour lesquelles la distance mutuelle minima ρ ne surpasse pas 2,5, on a obtenu les 28 cas suivants. Dans ce relevé, on indique, pour chacune des 2 orbites (comète et Pluton), les coordonnées rectangulaires héliocentriques $r \cos\beta$, $r \sin\beta$, du point correspondant à la proximité minima, et aussi, pour l'intervalle 1710 à 1960, l'époque approximative t du passage effectif de l'astre en ce point.

Comète.			Proximité minima.		Point de l'orbite cométaire.			Point de l'orbite de Pluton.		
Nom.	*e*.	P.	λ.	ρ.	$r \cos\beta$.	$r \sin\beta$.	*t*.	$r \cos\beta$.	$r \sin\beta$.	*t*.
1744......	1	–	33°,7	1,3	47,9	−13,0	1717,8	47,6	−14,2	1853,6
1811 II.....	0,98092	755 ans	255,8	0,8	30,0	+ 5,9	1763,4	30,2	+ 5,2	1750,8
1819 II.....	1	–	95,7	0,7	43,3	− 2,4	1841,1	43,4	− 3,1	1918,1
1821......	1	–	54,7	0,9	47,6	−12,8	1847,2	47,8	−12,0	1876,4
1846 I......	0,99240	2721	292,8	0,3	34,5	− 0,4	1830,2	34,5	− 0,7	1769,1
1849 II.....	1,00071	–	29,7	2,3	48,2	−12,2	1876,5	47,3	−14,4	1849,3
1854 I......	1	–	219,1	1,7	28,2	+ 9,9	1812,4	28,4	+ 8,3	1736,0
1855 II.....	0,99378	872	50,4	2,1	48,7	−10,7	1825,8	47,9	−12,6	1871,7
1864 II.....	0,99635	3933	108,6	0,2	40,9	− 0,3	1843,8	41,0	− 0,2	1929,1
1874 VI....	1		102,1	1,1	42,1	− 2,7	1895,7	42,2	− 1,6	1923,7
1879 II.....	1	–	231,3	0,5	28,7	+ 8,0	1892,0	28,7	+ 7,5	1740,7
1880 III....	1		245,6	1,4	28,8	+ 7,6	1868,3	29,5	+ 6,3	1746,5
1881 III....	0,99594	2429	95,3	2,4	43,5	− 5,6	1867,7	43,5	− 3,3	1917,7
1887 II.....	0,98461	999	279,7	0,1	32,7	+ 1,8	1871,3	32,7	+ 1,7	1762,1
1888 I......	0,99585	2183	75,6	0,9	46,4	− 7,1	1879,0	46,4	− 7,9	1898,6
1889 II.....	1	–	223,2	0,2	28,5	+ 8,2	1876,0	28,5	+ 8,0	1737,6
1889 IV....	0,99772	9740	107,9	2,2	41,3	− 2,5	1868,5	41,1	− 0,3	1928,5
1898 V.....	1	–	97,8	2,5	43,1	− 0,2	**1920,9**	43,0	− 2,6	**1920,0**
1898 VI.....	1	–	262,7	0,5	30,7	+ 4,7	1912,0	30,9	+ 4,3	1753,9
1898 VIII...	0,99936	3542	250,8	0,4	29,8	+ 5,3	1912,6	29,8	+ 5,7	1748,7
1900 II.....	1,00033	–	144,9	2,2	34,0	+ 3,9	1916,3	34,2	+ 6,1	1953,5
1903 III....	1	–	221,7	1,1	28,2	+ 9,2	1890,8	28,5	+ 8,2	1737,0
1904 II.....	1	–	35,6	1,3	46,9	−15,2	1932,3	47,6	−14,1	1855,6
1906 VII....	0,98263	583	258,6	0,4	30,5	+ 5,2	1921,6	30,5	+ 4,8	1752,1
1907 IV....	1	–	272,6	1,5	31,8	+ 4,3	1894,7	31,9	+ 2,8	1758,5
»	1	–	242,8	1,5	29,6	+ 5,1	1920,4	29,3	+ 6,6	1745,4
1920 III....	1	–	289,7	0,4	34,1	− 0,5	1905,2	34,1	− 0,1	1767,4
»	1	–	248,3	1,6	29,0	+ 7,5	1933,7	29,6	+ 6,0	1747,6

On constate immédiatement que, parmi les 28 proximités d'orbites mises en évidence, une seule, relative à la comète parabolique 1898 V, correspond, dans l'intervalle considéré, à une approche effective des astres, vers le milieu de 1920.

En examinant les dix proximités correspondant à des orbites cométaires elliptiques, on trouve qu'un rapprochement effectif de certains de ces astres avec Pluton a pu ou pourra éventuellement se produire ou voisinage des époques suivantes :

Comète.	Époque.
1811 II	252
1846 I	7270
1864 II	−2080
1881 III	− 570
1888 I	−6845
1898 VIII	8995
1906 VII	1445

Il s'agit bien entendu de simples indications, étant donnée la grande incertitude avec laquelle sont fixées les durées de révolution des comètes considérées.

RELATIVITÉ. — *Théorie unitaire de la gravitation et de l'électricité.* Note [1] de M. **Paolo Straneo**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans cette Note je donne une solution du problème unitaire, tel qu'il a été conçu depuis 1918, au moyen d'un système d'équations qui constitue une vraie *synthèse géométrique des phénomènes physiques*, d'un type plus général, mais analogue à la synthèse einsteinienne bien connue de la seule gravitation. Mes équations satisfont aux conditions fondamentales d'être dans un parfait accord avec les lois électromagnétiques de Maxwell, et de se réduire, en l'absence d'électricité, *rigoureusement* aux équations de la théorie einsteinienne.

1. La théorie de la gravitation einsteinienne se développe, comme on sait, dans un continu quadridimensionnel qu'on pourrait considérer comme formé de petits morceaux disgrégés du continu pseudo-euclidien. Mais l'usage a prévalu de le considérer comme doté de la plus simple des con-

(1) Séance du 26 mai 1931.

nexions possibles, qu'on exprime, avec les notations ordinaires, par la formule $L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$.

Dans la période 1918-1928, de nombreuses tentatives de généralisation (Weyl, Eddington) ont été faites dans le sens *d'étendre* cette connexion pour faire place, dans le continu, à quelque nouvel élément géométrique absolu, qui se prêtât au rôle électromagnétique. Mais on conserva en général à la connexion son caractère *symétrique* par rapport aux indices μ, ν.

2. Depuis quelques années, la géométrie a commencé à prendre en considération, surtout pour l'étude des questions de *parallélisme absolu*, des connexions *asymétriques*. Et c'est précisément sur cette notion de *parallélisme absolu* que M. Einstein fonda sa dernière théorie, qui tend aussi à une *synthèse d'ordre plus élevé*, analogue à celle que nous donnerait, par exemple, sa théorie de la gravitation, si toute notre physique pouvait, comme la mécanique céleste, s'épuiser par la considération des seules masses ponctuelles et disgrégées. On sait, en effet, que dans ce cas les équations einsteiniennes se réduisent aux $G_{\mu\nu} = 0$, qui déterminent par leurs singularités *les localisations*, et par leurs constantes d'intégration *les masses* des points; et tout cela sans avoir recours à aucun tenseur, tel que le $T_{\mu\nu}$ des équations einsteiniennes ordinaires. Mais, puisque M. Einstein lui-même ne peut pas encore se prononcer sur la valeur pratique de cette tentative, nous nous placerons encore exclusivement au point de vue habituel.

3. Des considérations fondées surtout sur l'étude comparative des propriétés des espaces à connexion affine, ou métrique, ou euclidienne, si bien exposées par M. Cartan, m'ont conduit à essayer la connexion

$$(1) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \delta^{\alpha}_{\mu} \Psi_{\nu} \qquad (\alpha, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4),$$

qui, comme on voit, est composée par la partie symétrique et la partie asymétrique les plus simples possible, et à tâcher d'en tirer des équations qui soient, en quelque façon, les analogues des équations einsteiniennes qu'on tire de la connexion $L^{\alpha}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$.

Le *tenseur de courbure*, dont l'expression générale est notamment

$$L^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial L^{\alpha}_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial L^{\alpha}_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + L^{\beta}_{\mu\rho} L^{\alpha}_{\beta\nu} - L^{\beta}_{\mu\nu} L^{\alpha}_{\beta\rho},$$

devient, dans le cas de la connexion (1) ($R^{\alpha}_{\mu\nu\rho}$ étant le *tenseur de Riemann*) :

$$L^{\alpha}_{\mu\nu\rho} = R^{\alpha}_{\mu\nu\rho} + \delta^{\alpha}_{\mu} \left(\frac{\partial \psi_{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \psi_{\nu}}{\partial x^{\rho}} \right).$$

Son *tenseur contracté* pour $\alpha = \rho$ et son *invariant scalaire* seront respectivement :

$$(2) \qquad L^{\alpha}_{\mu\nu\alpha} = L_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\psi_\nu}{\partial x^\mu}, \qquad L_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = L = G.$$

4. On obtient des équations très analogues aux équations einsteiniennes, et exprimant une des corrélations les plus simples entre le tenseur $g_{\mu\nu}$ et le vecteur ψ_ν, en écrivant

$$(3) \qquad L_{\mu\nu} - \frac{1}{2} L g_{\mu\nu} = E_{\mu\nu}.$$

où nous nous réservons de spécifier convenablement le tenseur $E_{\mu\nu}$.

En tenant compte des équations (2), nous pouvons partager les équations (3) dans leurs parties symétriques et hémisymétriques, et écrire le système, en posant $E_{\mu\nu} = -kT_{\mu\nu} + \psi_{\mu\nu}$:

$$(\mathrm{I}) \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu},$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\partial\psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\psi_\nu}{\partial x^\mu} = \Psi_{\mu\nu}.$$

Mais la partie à gauche des équations (I) est *à divergence nulle*. Admettons qu'il en soit également ainsi pour le tenseur $T_{\mu\nu}$. Au contraire, nous ne faisons aucune hypothèse restrictive sur la divergence des équations (II), et, indiquant par J^μ un vecteur contravariant quelconque, nous poserons

$$(\mathrm{III}) \qquad (\Psi^{\mu\nu})_\nu = J^\mu.$$

Les équations (I), (II) et (III) sont nos équations unitaires.

5. Pour faciliter l'interprétation physique que nous avons en vue, considérons, en premier lieu, encore le tenseur symétrique $T_{\mu\nu}$ partageable en deux parties, dont l'une $\tau_{\mu\nu}$ dépendant uniquement du tenseur hémisymétrique $\Psi_{\mu\nu}$ (et par conséquent du vecteur ψ_ν), et l'autre $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ soumise à la seule condition que la somme $\mathbf{T}_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ soit toujours à divergence nulle, autrement arbitraire. Considérons deuxièmement le vecteur J^μ aussi comme à divergence nulle. En dernier lieu, faisons pour le tenseur $\tau_{\mu\nu}$ le choix

$$\tau_{\mu\nu} = - g^{\alpha\beta} \Psi_{\mu\alpha} \Psi_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Psi^{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta},$$

qui notamment représente une des plus simples combinaisons tensorielles symétriques du tenseur hémisymétrique $\Psi_{\mu\nu}$.

6. Les équations (I), (II) et (III), avec les conventions du n° 5, sont

susceptibles d'une double interprétation, analogue à celle des équations einsteiniennes.

A cause des hypothèses sur les divergences des (I) et (III), et du fait que les (II) sont identiquement satisfaites lorsqu'il en est ainsi des (III), entre nos équations existent $4+6+1$ identités. Les variables du champ $g_{\mu\nu}$ et ψ_ν sont ainsi déterminées respectivement, à moins du choix arbitraire du système de référence et du gradient d'un scalaire, comme cela doit être.

En considérant les quantités arbitraires $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ et $\mathbf{J}^\mu$ comme des tenseurs purement géométriques, $g_{\mu\nu}$ s'interprète comme tenseur fondamental de l'espace-temps et ψ_ν comme vecteur de torsion; en les considérant comme tenseur énergétique de la matière et hypercourant, $g_{\mu\nu}$ s'interprète comme potentiel einsteinien de la gravitation et ψ_ν comme potentiel électromagnétique.

Les équations (II) et (III) sont toujours les équations de Maxwell et, en l'absence d'électricité, tout le système se réduit exactement aux équations gravitationnelles.

PHOTOGRAPHIE. — *Sur la projection, en relief dans l'espace, de l'image composite enregistrée par la plaque autostéréoscopique*. Note (1) de M. E. **Estanave**, présentée par M. A. Cotton.

J'ai indiqué (2) que la plaque *autostéréoscopique* porte sur l'une de ses faces, en éléments filiformes enchevêtrés et alternés, les images d'un couple stéréoscopique, l'une réservée à l'œil droit, l'autre à l'œil gauche. La face opposée de la plaque porte le réseau ligné ayant servi à l'enregistrement des deux images et servant ultérieurement à l'observation.

Le but de la présente Note est de faire connaître un dispositif nouveau que j'ai réalisé, permettant d'obtenir par *vision directe* la projection en relief, dans l'espace, de l'image du sujet provenant de la synthèse des deux images enregistrées par la plaque.

En éclairant la plaque positive, en lumière diffuse, du côté émulsion, dans une position renversée comme pour toute projection, une lentille d'assez grand diamètre (celle utilisée avait 10cm de diamètre et environ 30cm de distance focale) projette dans l'espace la double image inscrite sur la plaque.

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) *Comptes rendus*, **148**, 1909, p. 224.

Si cette image est reçue sur un écran plan, on obtient une grande confusion créée par l'empiétement réciproque des deux images projetées. Par vision directe, le triage de chacune de ces images pour chaque œil n'étant pas assuré, la vision stéréoscopique n'est pas réalisée. Mais en interceptant les rayons lumineux donnant cette double image à l'aide d'une grande lentille plan convexe L d'environ 33^{cm} de distance focale, on obtient dans l'espace, au delà et à environ 30^{cm} de cette lentille L, une image réelle du sujet, présentant à l'*œil nu* un excellent relief.

Grâce à la lentille d'observation et au réseau ligné porté par la plaque, chacun des yeux de l'observateur à environ 50^{cm} de la lentille L reçoit *exclusivement* le faisceau de rayons correspondant à chacune des images. Ainsi les deux images aériennes sont vues au *même endroit*, flottant dans l'espace, chacun des yeux percevant *exclusivement* celle qui lui est destinée. Les deux conditions de la vision stéréoscopique se trouvent satisfaites, le relief apparaît.

Si l'on substitue à la plaque à réseau portant les deux images du couple stéréoscopique, une plaque portant une image changeante ou animée, les lignes du réseau étant, cette fois, horizontales, on perçoit en élevant ou abaissant légèrement la tête, au-devant de la lentille d'observation, l'un ou l'autre des aspects de la photographie animée.

Enfin on peut obtenir *à la fois* le relief et l'aspect changeant ou animé en projetant une plaque à réseaux quadrillés, contenant sur son émulsion, en éléments punctiformes, comme je l'ai indiqué [1], quatre images stéréoscopiques conjuguées deux à deux pour l'aspect A ou l'aspect B. L'observateur perçoit, suivant le point de vue, au-devant de la lentille d'observation, et flottant dans l'espace, soit le sujet A, soit le sujet B avec *son relief*.

En résumé, grâce au dispositif signalé, on obtient par *vision directe* la perception stéréoscopique dans l'espace, en partant des *deux images du sujet* inscrites sur la plaque autostéréoscopique ou sur un stéréogramme à réseau séparé.

---

[1] *Comptes rendus*, 150, 1910, p. 683.

SPECTROGRAPHIE. — *Sur la complexité de la série L du baryum.* Note (¹) de MM. V. **Dolejšek** et **J. Kubiček**, présentée par M. M. de Broglie.

Dans le travail *The complexity of the* $K\beta'$ *line of X-ray spectra*, publié dans *Nature* (²), l'un de nous a étudié l'allure de la raie $K\beta'$ pour différentes combinaisons du manganèse. On avait supposé que sa longueur d'onde dépendait de la liaison chimique et qu'on ne pourrait arriver à la séparer de la raie $K\beta_1$ que pour certaines combinaisons. Il a démontré, au contraire, qu'il est possible de la séparer de la raie principale pour toutes les combinaisons. Mais il a constaté que le rapport des intensités de ces raies varie pour les différentes combinaisons. La raie $K\beta'$ a été trouvée sous la forme d'une bande d'émission non séparée de la raie $K\beta_1$. Une bande d'émission semblable a été trouvée depuis par les auteurs au voisinage des principales raies de la série L du baryum ($L\alpha_1$, $L\beta_2$ et $L\gamma_1$) mais cette fois du côté des longueurs d'onde plus courtes.

On a photographié sur quelques clichés en même temps les raies $K\beta_1$ et $K\beta'$ du cuivre. Comme le satellite $K\beta'$ est situé du côté des longueurs d'onde plus longues de la ligne principale, tandis que les satellites de la série L apparaissent sur le même cliché du côté opposé des raies correspondantes, il est évident qu'on ne peut pas penser à un élargissement des raies dû par exemple à la pénétration des rayons dans le réseau cristallin, la dispersion étant augmentée.

La présence de la raie $K\beta'$ dans le spectre du cuivre et la valeur de la différence des longueurs d'onde de la raie $K\beta_1$ ($\Delta\lambda = 1{,}0$ U.X) de nouveau mesurée, confirme les résultats du travail cité plus haut. On ne peut pas supposer qu'elle est due aux qualités ferromagnétiques, comme on l'avait primitivement pensé en la trouvant seulement pour les éléments du groupe du fer. De même il n'est pas possible de l'attribuer au doublet provenant de la différence des niveaux M_{II} et M_{III}. Les différentes valeurs du rapport des intensités $K\beta_1 : K\beta'$ pour les différentes combinaisons chimiques suggèrent que l'origine du satellite dépend de la liaison chimique. Il semble aussi que même les bandes d'émission des raies $L\beta_2$ et $L\gamma_1$ sont en relation avec la liaison chimique.

(¹) Séance du 18 mai 1931.

(²) Voir Dolejšek et H. Filčkáová, *Nature*, 123, March 16, 1929, p. 412.

Les longueurs d'onde de ces bandes d'émission (mesurées de la même façon que les bandes d'absorption) sont :

$$L\beta_2\,\lambda = 2399,3\,X;\qquad L\beta'_2\,\lambda = 2398,6\,X,$$
$$L\gamma_1\,\lambda = 2236,6\,X;\qquad L\gamma'_1\,\lambda = 2235,4\,X.$$

Ces valeurs ont été déterminées en employant l'oxyde de baryum sur l'anticathode et même sur le filament. Il n'était pas possible d'obtenir avec d'autres combinaisons du baryum des clichés assez distincts pour pouvoir déterminer aussi le rapport de leurs intensités à l'intensité des raies principales. Du côté des grandes longueurs d'onde on n'a constaté aucun élargissement. Ainsi toutes ces bandes d'émission sont plutôt analogues aux satellites de la raie $K\alpha_1$ ($K\alpha$ et $K\alpha'$) qu'aux satellites de la raie $K\beta$, dont l'origine n'est pas encore éclaircie. Nous avons ainsi mis en évidence la complexité des raies principales de la série L pour les éléments moyens. La raie $L\beta_1$ ne montre aucun élargissement. La raie $L\alpha_1$ montre une bande d'émission, qui n'est pas complètement séparée de celle-ci et qui peut être classée. Sa longueur d'onde correspond à la raie $L\alpha_3$ qui a été mesurée pour les éléments plus lourds. Nous l'avons mesurée aussi pour les éléments I et Cs et classée comme $L\alpha_3$. Les longueurs d'onde déterminées sont

	$L\alpha_1$.	$L\alpha_3$.
Ba	2770,1 X	2767,6 X
Cs	2885,4 X	2882,1 X
I	3140,7 X	3138,0 X

Ces valeurs sont en bonne concordance avec les valeurs extrapolées pour la raie $L\alpha_3$ à partir des éléments plus lourds.

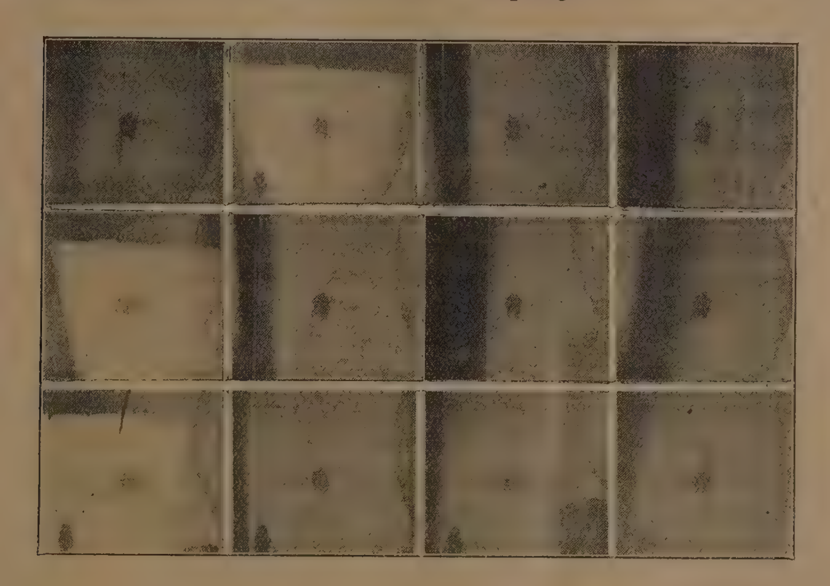
CINÉMATOGRAPHIE. — *Sur un cinématographe ultra-rapide donnant de 2000 à 3000 images par seconde.* Note de MM. **E. Huguenard** et **A. Magnan**, présentée par M. d'Arsonval.

L'étude du vol libre des insectes ne peut être que difficilement abordée avec les cinématographes rapides usuels; d'autre part les méthodes stroboscopiques ne peuvent donner des indications qu'avec un vol stationnaire; il n'y a aucune raison pour que celui-ci soit identique à un vol normal.

En vue d'une telle étude, nous avons été conduits à imaginer des dispositifs grâce auxquels nous avons pu sans peine obtenir et même dépasser

2000 vues par seconde avec un appareil qui permet ensuite de passer au ralenti le mouvement enregistré.

La méthode employée consiste à séparer le film en un certain nombre de bandes, impressionnées chacune par un objectif spécial, les divers objectifs travaillant à tour de rôle à intervalles de temps égaux.



Nous avons à cet effet placé côte à côte quatre objectifs de petites dimensions, couvrant chacun un quart de la largeur du film normal; nous avons ainsi des images qui ont chacune environ 6mm sur 5mm.

Devant ces objectifs, tourne un obturateur percé d'une série de fentes fonctionnant comme celle d'un obturateur de plaque et disposées de telle façon que 4 fentes d'un même groupe découvrent successivement les 4 objectifs et que, lorsque la dernière fente d'une série termine la quatrième ouverture, la première fente d'une autre série vient à son tour découvrir le premier objectif. Il en résulte que, sur la surface occupée par une image ordinaire d'un film, nous pouvons loger au moins 12 vues.

La bande photographique défile d'une manière continue, à une vitesse qui est de l'ordre de 3 m/sec, de sorte qu'il est possible d'enregistrer environ 2400 images sur cette longueur.

La vitesse du déroulement du film peut être d'ailleurs poussée sans inconvénient jusqu'à 5 m/sec qui est la vitesse normale des cinématographes

rapides actuels fournissant 250 vues à la seconde. On peut ainsi augmenter le nombre des images qui pourrait atteindre 10.000 par seconde si la largeur de la bande photographique pouvait être portée à 60 mm.

Nous avons appliqué, entre autres, cette méthode cinématographique à l'étude du vol libre d'une grosse mouche (*Calliphora vomitaria*). Nous avons obtenu, en même temps que nous mesurions la fréquence des images à l'aide d'un chronographe, une série de photographies successives dont nous reproduisons quelques exemplaires. Ces enregistrements, effectués à raison de 2400 par seconde, nous ont montré que le nombre de coups d'ailes donnés par cette mouche était environ de 100 par seconde.

Nous avons aussi avec un tel appareil étudié le vol d'un Linot du Sénégal, à raison de 3000 vues par seconde, ce qui nous a permis de bien examiner les différentes phases du coup d'aile de cet oiseau qui exécute 30 battements environ par seconde.

SPECTROCHIMIE. — *Recherche de l'élément* 61 *au moyen de la spectrographie optique*. Note de M. S. **Takvorian**, présentée par M. G. Urbain.

Dans une récente Communication, je relatais les résultats auxquels m'avait conduit l'étude, au moyen des rayons X, d'une série de fractions de terres rares intermédiaires entre le néodyme et le samarium.

Comme méthode également très sensible, je me suis adressé à la spectrographie d'arc. Cependant, au lieu d'une lecture directe, les spectres obtenus à l'aide des différentes fractions furent photométrés au moyen du microphotomètre enregistreur de Chalonge-Lambert. De cette façon, en même temps que chaque raie est traduite par un minimum de transparence, l'échelle des longueurs d'onde se trouve multipliée par un coefficient pouvant varier entre 15 et 20.

Pour l'étalonnage de ces diagrammes, on a fait usage d'une méthode graphique, qui possède de plus l'avantage de permettre une approximation satisfaisante.

Pour les fractions de tête, constituées par du néodyme pur, ainsi qu'il a résulté de l'étude aux rayons X, j'ai pu observer dans la région allant de 3150 UÅ., à 3200 UÅ., outre les raies connues, une cinquantaine de raies dont les intensités sont inférieures à l'unité de l'échelle d'intensité d'Exner. Le tableau ci-après renferme les principales raies de cette région.

3199,85	3189,9	3180,0	3172,7	3162,3
98,8	88,84	79,03	71,7	61,1?Nd
96,7	86,0	78,0?Nd	69,8?	59,3
96,2	85,35	76,85	68,3	58,3
95,2	84,6	76,09	65,75	57,3
94,7	83,9	75,2	64,6	56,9
93,2?Nd	82,4	74,35	63,8	55,87
91,63	81,65	73,65	62,75	54,9
90,9?Nd	80,75			

Les fractions de queue, composées de samarium pur, ont montré une quarantaine de raies d'intensité inférieure à l'unité de l'échelle d'Exner, dans la même région spectrale et dont les principales se trouvent ci-dessous :

3196,8	3187,89	3180,5	3169,7?	3163,4
96,32	87,35	78,25	68,9	62,44
93,15	86,15	76,0	67,9	62,28
92,15	84,9?Sm	75,0	67,1	59,9
89,6	84,03	70,33	65,5	57,9
88,84	83,4?Sm	70,00	64,2?Sm	

Il est intéressant de remarquer que là où les spectres de rayons X d'émission laissent voir des produits purs, la spectrographie d'arc offrait des paliers de spectres constants.

Les fractions intermédiaires, examinées dans les mêmes conditions, ont présenté la somme des raies du néodyme et du samarium.

Une preuve plus rigoureuse de l'absence des raies de l'élément 61 est fournie par le fait suivant :

Ayant constitué des fractions synthétiques à l'aide du néodyme pur de tête et de samarium pur de queue dans des proportions analogues à celles des fractions réelles, j'ai comparé respectivement entre eux les spectres d'arc des deux séries. Les courbes photométriques ainsi obtenues sont parfaitement identiques ; les quelques légères différences proviennent des impuretés contenues dans le charbon employé comme support.

RADIOACTIVITÉ. — *Atomes de recul dans les gaz rares*. Note (1) de M. **La. Goldstein**, présentée par M. Jean Perrin.

Il a été montré (2) que le rendement d'activation d'une électrode négativement chargée, plongée dans une atmosphère de radon et d'air, varie avec

(1) Séance du 18 mai 1931.

(2) Laporte et La. Goldstein; *Comptes rendus*, **189**, 1929, p. 689.

la pression du mélange gazeux, pour une même tension appliquée aux électrodes.

En particulier, on a déterminé (¹) les rendements d'activation des électrodes dans un mélange de radon et d'air sous différentes pressions en utilisant pour chaque pression un champ électrique suffisant pour obtenir le courant de saturation des ions de deux signes, c'est-à-dire pour éviter les recombinaisons. On a observé dans ces conditions que le rendement d'activation d'une électrode négativement chargée est indépendant de la pression du gaz (= 83 pour 100 dans l'air).

On a observé également que si, sous une pression donnée, l'intensité du champ électrique atteint la valeur pour laquelle l'ionisation par choc du gaz débute, le rendement sur la cathode diminue.

Dans les expériences (²) dont les résultats suivent nous avons eu recours à des gaz rares (argon, néon, hélium) soigneusement purifiés, pour pouvoir réaliser aisément les conditions de saturation.

En effet, il résulte des expériences de MM. Laporte et da Silva (³) que dans l'argon soigneusement purifié, débarrassé notamment d'oxygène et de vapeur d'eau, les électrons restent à l'état libre dans le gaz même sous pression élevée et en sont extraits par un champ électrique de faible intensité.

Les activations ont lieu sous différentes pressions, la tension correspondant à la saturation du courant des électrons. (Le champ électrique nécessaire dans le condensateur variait suivant la pression de 7 à 10 volts par centimètre.)

Dans ces conditions, nous avons observé que le rendement sur l'électrode négativement chargée est indépendant de la pression du gaz, ainsi que cela avait lieu dans l'air. Ce rendement est le même pour les trois gaz utilisés (argon, néon, hélium) égal à 32 pour 100, c'est-à-dire beaucoup plus faible que dans l'air (83 pour 100). Le rendement sur l'électrode positivement chargée montre par contre une légère augmentation avec la pression, ainsi que cela ressort de la courbe ci-contre.

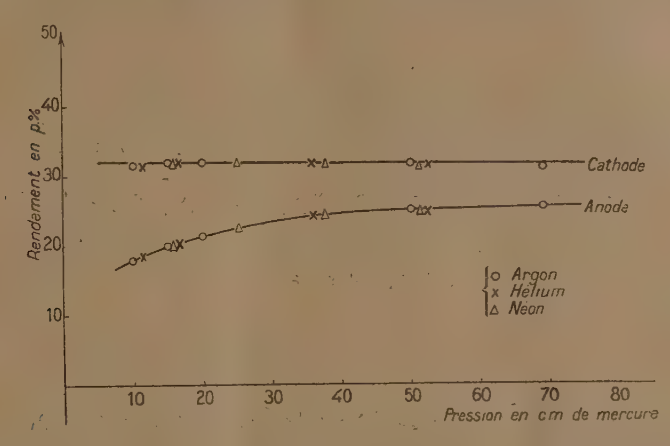
On a étudié d'autre part, sous une même pression (néon à la pression de 30^{cm} de Hg), la variation du rendement pour des champs électriques supérieurs au champ de saturation.

(¹) La. Goldstein, *Comptes rendus*, 191, 1930, p. 1450.

(²) L'appareil utilisé est un condensateur à plateaux de 30^{mm} de diamètre, distants de 40^{mm}. Le volume du condensateur est 50$^{\text{cm}^3}$.

(³) M. Laporte et M. da Silva, *Comptes rendus*, 183, 1926, p. 287.

Le rendement d'activation sur la cathode diminue d'abord comme cela avait lieu dans l'air, passe par un minimum marqué, puis croît à nouveau fortement lorsque le champ d'activation dépasse de beaucoup celui pour



lequel l'ionisation par choc débute; le rendement sur l'anode présente une variation en sens inverse.

Gaz = néon à p = 30cm de Hg.

Intensité du champ d'activation.	Rendements en pour 100. Cathode.	Anode.
8 volts/cm	32	23
12 »	26,5	27,5
22 »	22,5	12,5
44 »	41	12
88 »	50	11,5

Il est remarquable :

1° Que sous le champ de saturation les rendements soient les mêmes dans les trois gaz rares. Si les atomes de Ra A sont positivement chargés au moment du recul, comme pensent certains auteurs, un certain nombre d'entre eux se recombinent et même se chargent négativement et cela malgré le champ de saturation;

2° Que pour une pression donnée le rendement sur la cathode augmente avec l'intensité du champ après avoir passé par une valeur minimum;

3° Que dans les conditions de saturation le rendement sur la cathode soit plus faible que dans l'air et que inversement le rendement sur l'anode soit plus élevé.

Le premier résultat indique que le rendement sous le champ de saturation est indépendant du potentiel d'ionisation du gaz [1].

Le deuxième résultat s'explique par le fait que sous des champs intenses ($h > 40$ volts par centimètre) des groupements d'atomes, existant au sein du gaz, sont entraînés sur l'électrode négative [2].

Le troisième résultat semble montrer que l'électro-affinité du milieu gazeux a une influence sur le rendement.

Des expériences sont en cours pour élucider cette question.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Équilibres d'adsorption sur le bioxyde de manganèse préalablement précipité*. Note [3] de Mlle **L.-S. Lévy**, présentée par M. G. Urbain.

M. Geloso (voir aussi J. Tillmans, P. Hirsch et F. Häffner, *Gas- und Wasserfach*, 2, 8 janv. ; 3, 15 janv. 1927), a montré que le bioxyde de manganèse obtenu par voie humide est en réalité un pseudo-bioxyde répondant à la formule $n MnO^2, MnO$; l'oxyde manganeux fixé par un mécanisme d'adsorption pouvant être partiellement ou totalement remplacé par la fraction hydrolysée d'un électrolyte étranger.

Nous avons entrepris l'étude systématique de l'adsorption du manganèse divalent Mn^{II} par un bioxyde préalablement préparé aussi pur que possible, et celle de son déplacement par un sel de cuivre.

Existence d'un équilibre d'adsorption du Mn^{II}. — Par contact prolongé entre une solution d'un sel manganeux et un pseudo-bioxyde précipité, l'équilibre d'adsorption est rapidement atteint. Dans nos conditions expérimentales ($T = 30{,}6°C.$; $pH = 1{,}4$ et $0{,}6$) une attaque acide du support ne peut être complètement évitée. Elle influe sur la durée du palier d'équilibre (*fig.* 1). Nous avons pu cependant montrer la réalité d'un équilibre thermodynamique en le déplaçant dans un sens ou dans l'autre par simple variation de concentration dans la phase liquide [4]. Le détail de ces mesures ne peut pas trouver place ici, mais sera publié ultérieurement.

---

(1) Les résultats de M. Briggs (*Phil. Mag.*, 50, 1925, p. 600) sont relatifs à des champs beaucoup plus intenses.

(2) Que l'on constate d'une part lors de l'examen de la nature du dépôt sur les électrodes (excès de RaB) et d'autre part par la photographie des électrodes activées.

(3) Séance du 26 mai 1931.

(4) M. Geloso, *Ann. Chim.*, 10e série, 6, 1926, p. 352.

Déplacement par un sel de cuivre du Mn^{II} *adsorbé.* — Dans des solutions en équilibre d'adsorption, on introduit du sulfate de cuivre et l'on détermine

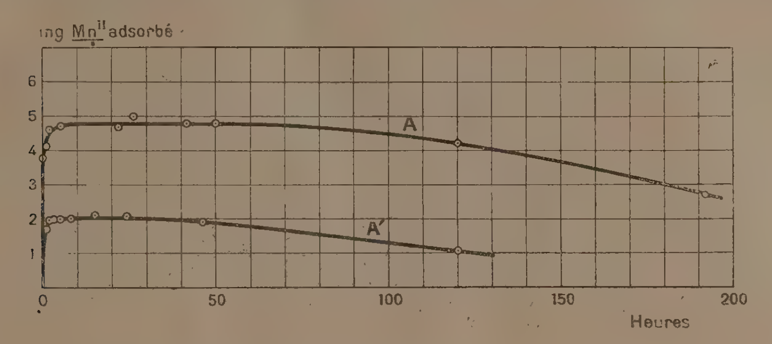


Fig. 1.
Courbe A, adsorptions à pH = 1,4; courbe A', adsorptions à pH = 0,6.
Concentration initiale : 5,75 mg de Mn^{II} dans 125 cm³ de solution.

le manganèse divalent déplacé ainsi que le cuivre simultanément adsorbé.

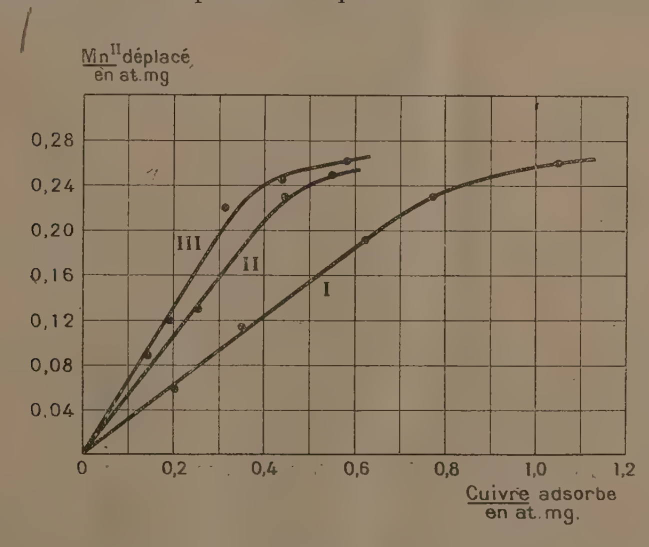


Fig. 2.
Concentrations initiales : courbe I, 0,84 at. mg/lit de Mn^{II}; courbe II, 1,16 at. mg/lit de Mn^{II}; courbe III, 3,32 at. mg/lit de Mn^{II}.

Pour une même concentration initiale de l'électrolyte étranger, le déplacement relatif du Mn^{II} adsorbé paraît sensiblement indépendant du pH.

Ainsi, pour les concentrations initiales suivantes :

Manganèse divalent.	$5^{mg},75$ dans 125^{cm^3}
Cuivre.	$59^{mg},5$ »

on obtient : à pH = 1,4, $4^{mg},3$ de Mn^{II} adsorbé avant déplacement et $3^{mg},3$ de Mn^{II} restant adsorbé à l'équilibre ; à pH = 0,6, $2^{mg},0$ de Mn^{II} avant déplacement et $1^{mg},6$ à l'équilibre, soit une variation relative moyenne de 24 pour 100 dans les deux cas.

On a pu remarquer en outre (*fig.* 2) que, pour une concentration donnée du manganèse initialement en solution, la quantité de manganèse divalent désorbé est tout d'abord proportionnelle à la quantité de cuivre fixé sur le précipité. La portion rectiligne de chacun des diagrammes répond donc, en adoptant les conventions de M. Dubinin (¹), à la relation

$$\frac{b-y}{x} = k,$$

où b est la quantité de Mn^{II} adsorbé en l'absence de cuivre, y la quantité adsorbée en présence de cuivre pour une même concentration initiale du manganèse divalent et x la quantité de cuivre adsorbé.

Toutefois, le réseau de droites obtenu montre que la constante k de M. Dubinin dépend de la concentration totale C_T du manganèse divalent. La relation est en réalité

$$\frac{b-y}{x} = f(C_T).$$

Existence d'un équilibre de déplacement. — Il a été possible de montrer que dans ces déplacements on atteint un équilibre au sens originel du mot.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Diagramme de solidification des alliages calcium-sodium.* Note (²) de M. **E. Rinck**, présentée par M. G. Urbain.

Les alliages calcium-sodium ont été étudiés en 1929 par Lorenz et Winzer (³). Comme l'a montré Antropoff, le calcium utilisé par ces auteurs contenait de l'azoture de calcium (⁴). J'ai repris l'étude de ces

---

(¹) M. Dubinin, *Zeit. f. phys. Chem.*, B, 135, 1928, p. 24.

(²) Séance du 26 mai 1931.

(³) R. Lorenz et Winzer, *Z. anorg. Ch.*, 179, 1929, p. 281.

(⁴) Antropoff et Falk, *Z. anorg. Ch.*, 187, 1930, p. 405.

alliages en partant de métaux purifiés par distillation fractionnée dans le vide. Le calcium obtenu fondait à 84°, 8 C.

Appareil. — L'alliage était contenu dans un creuset d'acier décarburé, lui-même placé dans un tube en porcelaine qui pouvait être chauffé par un four électrique. L'évaporation du sodium était évitée par une zone à température plus élevée, réalisée à quelques centimètres au-dessus de la surface du métal par un enroulement auxiliaire. La température était mesurée par un couple thermo-électrique qui, protégé par un mince tube d'acier plongeait dans le métal. Ce tube servait en même temps d'agitateur. Pendant l'opération l'appareil était maintenu sous une légère surpression d'argon pur. Les courbes de refroidissement étaient enregistrées photographiquement et par la lecture directe.

Résultats. — 1° *Liquidus.* — Les deux métaux étant à miscibilité réciproque, le liquidus comprend une partie horizontale *a-a'* à 710° C. Les deux couches ont la composition :

a. Solution de 7 pour 100 en poids de Na dans Ca;

a'. Solution de 14 pour 100 en poids de Ca dans Na.

J'ai pu constater l'existence d'un eutectique sur la branche *a*-Na. Son point de solidification est à $\frac{2°,5}{100}$ C., en dessous du point de fusion du sodium.

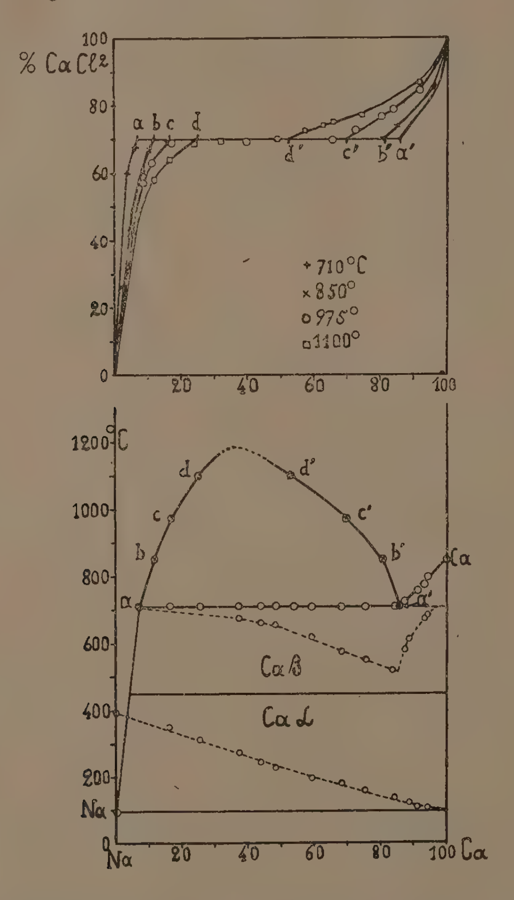
2° *Miscibilité des métaux fondus.* — Lors de l'étude à 850° C. de la réaction d'équilibre $Ca + 2ClNa \rightleftharpoons 2Na + Cl^2Ca$, j'ai démontré que cette isotherme doit présenter un palier horizontal [1]. En effet, pour des faibles concentrations de Ca ou de Na dans la phase métallique, le système formé de deux phases : métaux et sels, est bivariant. Si dans la phase métallique la concentration d'un métal dépasse sa solubililité dans l'autre, une deuxième phase métallique apparaît, le système devient monovariant. Or l'étude de la réaction $Ca + 2ClNa \rightleftharpoons 2Na + Cl^2Ca$ permet de trouver la concentration pour laquelle cette deuxième phase métallique se présente. En traçant différentes isothermes on obtient des points tels que *a* et *a'*, *b* et *b'*, *d* et *d'*, qui pour la température considérée indiquent les concentrations pour lesquelles la phase métallique se sépare en deux couches de composition *b* et *b'* par exemple. C'est donc là une méthode précise pour obtenir la courbe de solubilité réciproque du calcium et du sodium en fonction de la température.

L'étude de la réaction faite à 850° C. [1] a été étendue aux isothermes 710° C. (température de solidification de l'alliage *a'*), 975° et 1100° C. Les

---

[1] Rinck, *Comptes rendus*, **191**, 1930, p. 404.

résultats obtenus sont consignés dans le diagramme supérieur. La courbe de miscibilité qui en résulte est tracée dans le diagramme inférieur. On constate par une légère extrapolation que le calcium et le sodium sont



miscibles en toutes proportions à des températures supérieures à 1185° C. Dans la figure l'espace relatif au calcium solide est d'ailleurs divisé en deux régions, correspondant aux deux variétés du calcium que j'ai pu mettre en évidence ([1]).

En résumé ce travail montre qu'il existe une méthode générale permettant

([1]) Rinck, *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 421.

de trouver avec une précision satisfaisante la courbe de solubilité en fonction de la température de deux métaux partiellement miscibles. Il faut remarquer que cette méthode s'applique également dans le cas où l'effet thermique de la réaction d'équilibre étudiée est notable, c'est-à-dire quand la concentration de la phase saline du système monovariant dépend de la température.

CHIMIE MINÉRALE. — *Action des anhydrides sur les métaux.* Note [1] de MM. M. **Lemarchands** et **H.-L. Roman**, présentée par M. H. Le Chatelier.

Cette action n'a été signalée que dans un nombre restreint de cas.

a. Action de SO^2 sur les divers métaux; obtention des hydrosulfites [2], [3];

b. Action de NO sur le cuivre; obtention du cuivre nitré [4];

c. Action de CO sur divers métaux; obtention des métaux carbonyles [5];

d. Action de CO^2 sur Na; obtention de l'oxalate de sodium [6].

L'action se passe en l'absence d'eau et montre une inertie curieuse qui a été vaincue soit par élévation de température, [4], [6], soit par des moyens spéciaux permettant un meilleur contact des corps réagissants [3], [6]. La combinaison serait une réaction de simple addition : elle n'est vraiment démontrée que par l'obtention des métaux carbonyles. Dans les autres cas elle est; soit niée [3], soit mise en doute par les résultats très médiocres obtenus. Nous avons repris cette question en discutant le mode opératoire suivi précédemment par Drechsel dans l'obtention de $C^2O^4Na^2$ par action de Na fondu et divisé sur CO^2.

Il faut observer que deux réactions sont possibles : réaction de fixation

$$(I) \qquad 2CO^2 + M^2 = C^2O^4M^2;$$

---

[1] Séance du 26 mai 1931.

[2] *Badische Anilin und Soda Fabrik* (D. R. P. 160529 et 162912, 1905).

[3] Billy, *Comptes rendus*, 140, 1905, p. 936.

[4] Sabatier et Senderens, *Annales de Chimie et de Physique*, 2e série, 7, 1896, p. 348.

[5] Mond, Langer et Quinke, *Chem. Soc.*, 57, 1880, p. 749.

[6] Drechsel, *Ann. Chem.*, 146, 1868, p. 140

réaction de réduction

(II) $$CO^2 + 2M^2 = C + 2M^2O.$$

Voici les chaleurs dégagées dans le cas du sodium et du potassium exprimées en kilojoules :

	K.	Na.
Réaction (I)	551	532,5
Réaction (II)	327	435
Différence	224	97,5

Ces chiffres prouvent que le sodium agit surtout comme réducteur, le potassium comme métal : la réduction doit donc être plus aisée avec ce dernier corps. Enfin, les tensions de vapeur suivantes font également prévoir que la réaction (I) sera plus facile avec K qu'avec Na.

Valeurs de la tension de vapeur	760mm.	1mm.	0mm,001.	
A la température centigrade de	758°	344°	162°	pour K.
»	822°	431°	238°	pour Na.

Reprenant la méthode de Drechsel nous avons substitué K à Na dans la réaction. Celle-ci s'effectue dans un appareil constitué par un vase à précipité en Pyrex de 500cm³. Ce vase qui contient du sable de Fontainebleau pur et sec est chauffé dans un bain de limaille de cuivre, il est fermé par un bouchon portant d'une part les tubes d'arrivée et de départ de CO^2, un tube de gros diamètre pour l'introduction de K, un tube traversé par un agitateur en verre. Cet agitateur est muni d'un système à joint de mercure pour éviter toute introduction d'air dans l'appareil. Nous faisons passer un courant rapide de CO^2 sec et lorsque la température du bain de limaille atteint 240° contre le vase, nous introduisons 2g de potassium dans le récipient, en le mélangeant au sable avec l'agitateur.

La matière prend d'abord un aspect métallique, puis une teinte violacée après quelques minutes de chauffage. Au bout d'un quart d'heure environ le potassium a entièrement disparu : il reste une masse pulvérulente grise. Après refroidissement dans le courant de CO^2 le sable est épuisé par l'eau, $C^2O^4H^2$ formé est dosé par MnO^4K.

Cette expérience répétée à diverses températures nous a montré que la température la plus favorable était comprise entre 230 et 240°. Le rendement optimum en $C^2H^2O^4$ est de 17 pour 100.

Avec le même appareil, Na nous a donné un rendement maximum de 1,5 pour 100; pour cela il faut chauffer à 350° ce qui rapproche l'action des

conditions de réduction de CO^2 par Na, de sorte que c'est surtout cette réaction qui prédomine.

Nos expériences fixent donc, en vérifiant les conclusions thermochimiques, les conditions de fixation directe de l'anhydride CO^2 sur K et Na et démontrent la possibilité de l'action des anhydrides sur les métaux.

CHIMIE INDUSTRIELLE. — *Contribution à l'étude des mélanges essence-alcool-benzol.* Note (¹) de MM. **Charles Baron**, **Charles Boulanger** et **René Le Grain**, présentée par M. Paul Painlevé.

Il est reconnu que les mélanges essence-benzol utilisés dans les moteurs d'aviation donnent d'excellents résultats, mais ils donnent lieu au phénomène de givrage dans le carburateur et ils sont instables à basse température.

L'addition d'alcool au mélange essence-benzol supprimant totalement le phénomène du givrage à l'intérieur du carburateur, nous avons été amenés à étudier la stabilité, à basse température, des mélanges essence-alcool-benzol. A cet effet nous avons utilisé une essence du type aviation avec point sec à 115°, et densité 0,698.

Nos essais ont porté sur des mélanges d'essence, de benzol « moteur » et d'alcool à 99°. Les mélanges préparés à l'avance ont été refroidis dans un mélange d'acétone et de neige carbonique permettant l'observation jusqu'à — 45°. Dans chacun des cas nous avons noté la température à laquelle le trouble apparaissait dans le mélange carburant.

Le mélange essence-benzol a d'abord été étudié avant toute addition d'alcool. Les résultats sont représentés par la courbe n° 1, laquelle montre la température du point de trouble en fonction de la teneur du mélange en benzol.

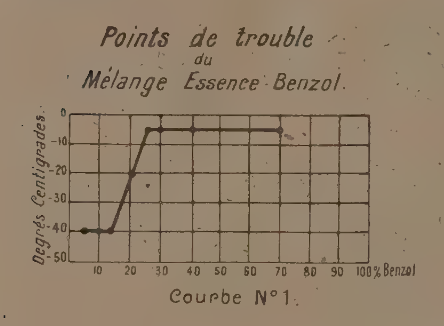
Cette courbe fait ressortir que la stabilité diminue au fur et à mesure que la proportion de benzol augmente. Le mélange est instable à — 5° dès que la teneur en benzol atteint 25 pour 100.

Le mélange essence-alcool à 99° a été étudié d'une manière analogue, et les résultats sont représentés par la courbe n° 2 qui donne la température du point de trouble en fonction de la teneur du mélange en alcool.

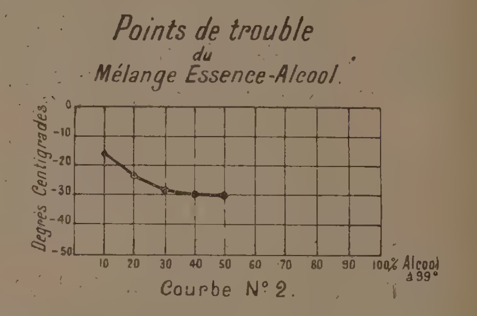
Cette courbe fait ressortir que, contrairement à ce qui a été constaté pour

(¹) Séance du 26 mai 1931.

le mélange alcool-benzol, la stabilité augmente ici avec la proportion d'alcool.



Courbe N° 1.



Courbe N° 2.

Les essais sur le mélange essence-benzol-alcool à 99° ont porté sur des proportions variables, et ont donné les résultats suivants :

Essence.	Benzol.	Alcool à 99°.	Point de trouble.
	%	%	°
80 pour 100	15	5	−18
»	10	10	−27
»	5	15	−25
70 pour 100	25	5	−15
»	20	10	−30
»	15	15	−30
»	10	20	−30
»	5	25	−30
60 pour 100	35	5	−30
»	30	10	−43
»	25	15	−43
»	20	20	−43
»	15	25	−43
»	10	30	−43
»	5	35	−40

Il résulte de là que l'adjonction de 10 pour 100 d'alcool au mélange essence-benzol abaisse comme suit la température des points de trouble :

Alcool à 99°.	Essence.	Benzol.	Point de trouble.
	%	%	°
10 pour 100	80	10	−27
»	70	20	−30
»	60	30	−43

Il est tout à fait remarquable que la stabilité du mélange essence-benzol va en décroissant avec la teneur en benzol, au contraire de ce qui avait été observé pour le mélange essence-alcool. Il apparaît donc que l'adjonction de 10 pour 100 d'alcool à 99° au mélange essence-benzol, non seulement abaisse considérablement la température du point de trouble (de — 5° à — 30° pour 70 pour 100 d'essence), mais encore change complètement l'allure du phénomène au point de vue de l'influence de la teneur en benzol. L'alcool agit vraisemblablement là en empêchant la cristallisation de certains des composants du benzol.

L'enseignement à tirer de ce travail est qu'un carburant composé de 70 pour 100 d'essence aviation, 20 pour 100 de benzol et 10 pour 100 d'alcool absolu offre l'avantage d'éviter le givrage et de présenter une grande stabilité aux basses températures, tout en conservant les qualités précieuses du mélange alcool-benzol.

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Constante diélectrique et constitution chimique. Méthode de mesure.* Note (1) de M. **André Chrétien**, transmise par M. Pierre Weiss.

Parmi les diverses propriétés physiques susceptibles d'être utilisées pour l'étude des réactions chimiques en milieu liquide ou en solution, la constante diélectrique a été laissée de côté. Cette propriété est cependant particulièrement significative par sa relation avec le moment électrostatique de la molécule. On ne disposait pas d'une technique simple adaptée à ce genre de recherches. Je l'ai réalisée en modifiant la méthode classique du pont alternatif décrite tout d'abord par Nernst (2).

Deux des bras du pont sont constitués par deux condensateurs variables, isolés au quartz, de capacité maximum égale à 0,001 microfarad. L'un de ces condensateurs a été étalonné par la méthode balistique, en utilisant une tension de 500 volts. La mesure consiste à équilibrer le pont en mettant la capacité inconnue en parallèle successivement avec les deux capacités du pont.

1° *Source de courant alternatif.* — J'ai remplacé avantageusement la bobine d'induction par un générateur d'oscillations non amorties com-

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) Nernst, *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 14, 1894, p. 622.

portant un tube à grille de puissance relativement grande. Le circuit oscillant excite le pont indirectement par induction afin de réduire la variation de fréquence due à la variation de capacité pendant les mesures, cause d'erreur pour la détermination de la constante.

2° *Détecteur.* — Au lieu d'un récepteur téléphonique, j'utilise un galvanomètre avec valve électronique. Ce dispositif permet de repérer avec précision l'équilibre du pont. Pour cela, on porte sur un graphique les déviations du spot lumineux en fonction de la capacité du condensateur étalon, utilisé pour équilibrer le pont. Les courbes obtenues sont très régulières; elles ont une allure parabolique. Le minimum de courant est déterminé par le tracé du diamètre rectiligne. On remplace ainsi une appréciation acoustique, qui reste toujours plus ou moins arbitraire, par une mesure précise.

Toutes les précautions nécessaires ont été prises. Les organes conservent une position définie et invariable; ils sont enfermés à l'intérieur de cages métalliques reliées au sol.

Le dispositif est remarquablement sensible aux faibles variations de capacité. De cette façon, l'amplification du courant passant dans le détecteur est superflue.

3° *Condensateur de mesure.* — J'ai adopté comme « récipient diélectrique » un condensateur cylindrique à axe vertical, dont les armatures sont des pellicules d'argent déposées sur verre. Le liquide qui le remplit peut se mettre rapidement en équilibre de température dans un thermostat. Ce condensateur est muni d'un anneau de garde à chaque extrémité. A lame d'air, sa capacité est de 50^{cm}.

Le résultat obtenu pour une même capacité C est indépendant de la capacité choisie arbitrairement pour l'un des bras du pont, cette capacité pouvant varier entre C et 0,001 — C microfarad.

J'ai mis ce dispositif à l'épreuve en déterminant la constante de liquides organiques soigneusement purifiés, parmi lesquels le benzène, le chloroforme, l'hexane et l'acétal. Les nombres suivants montrent que les résultats sont réguliers. Ils sont en bon accord avec les nombres indiqués récemment par Ball (¹).

Le liquide étalon est l'éther ($K = 4,335 \pm 5$) (²). La température est de 25° :

(¹) Ball, *Journal of the Chemical Society*, 1930, p. 570.

(²) *International Critical Tables*, 6, 1929, p. 87.

Benzène.	Chloroforme.	Hexane.	Acétal.
2,274	4,721	1,910	3,794
2,271	4,723	1,912	3,791
2,270	4,726	1,911	3,796
2,273	4,724	1,914	3,798

Je me propose d'utiliser ce dispositif pour l'étude de différents problèmes faisant intervenir des corps organiques et des solutions organiques : neutralisation d'un acide faible par une base faible, formation de bases, d'acides, de sels complexes, et de composés moléculaires, étude comparée des isomères, recherche des composés intermédiaires. La plupart des composés recherchés en solution organique ne peuvent être décelés en solution aqueuse, par suite d'une hydrolyse totale. Des expériences sont en cours.

Je signale, enfin, qu'une méthode analogue à celle décrite peut être substituée avantageusement à la méthode habituelle de mesure des conductivités dans laquelle on emploie traditionnellement le téléphone et la bobine d'induction.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Ortho- et méta-divinylbenzènes. Ortho- et méta-diacétylénylbenzènes.* Note (1) de M. **Deluchat**, présentée par M. Matignon.

M. Lespieau et moi avons déjà obtenu (2) le *p*-divinylbenzène et le *p*-diacétylénylbenzène, en partant du *p*-xylène. Nous avons répété la même suite d'opérations sur les *o*- et *m*-xylènes; là encore, nous sommes parvenu à préparer les carbures diéthyléniques et diacétyléniques correspondants.

I. Série ortho. — L'*o*-dioxydiéthylbenzène, dont nous avons déjà indiqué la préparation (3), traité en solution chloroformique par le tribromure de phosphore, conduit, par évaporation, à la dibromhydrine, gros cristaux monocliniques fondant à 91°. Nous avons réussi, en triant les cristaux à la pince, à séparer deux variétés énantiomorphes, possédant des facettes hémiédriques inversement disposées, et douées en solution du pouvoir rotatoire. Les exemples d'une telle séparation sont, à notre connaissance, assez rares; nous nous proposons d'ailleurs d'en poursuivre l'étude.

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) Lespieau et Deluchat, *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 683.

(3) Deluchat, *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 438.

L'*o*-dibromhydrine, distillée sous 3^{mm} avec un grand excès de quinoléine, nous a conduit à l'*o*-divinylbenzène $C^6H^4(CH=CH^2)^2$ 1.2, carbure à odeur caractéristique, bouillant à 78°,5 sous 11^{mm}, $d_{21}=0,934$; $n_D^{21}=1,5760$ réfraction moléculaire 46,06 présentant une exaltation de 2,01 double de celle du styrolène. A l'inverse des deux autres divinylbenzènes que nous avons préparés, il ne se polymérise pas à la température ordinaire.

Il absorbe violemment le brome, et donne alors un tétrabromure cristallisé, fondant à 71°-74° après plusieurs cristallisations.

Ce tétrabromure, traité par un grand excès de potasse dans l'alcool, ne conduit pas à l'*o*-diacétylénylbenzène; il y a cyclisation, et nous avons caractérisé la formation de naphtaline dans les produits de la réaction.

Par action ménagée de l'éthylate de soude, on obtient :

1° L'*o*-dibromure diéthylénique :

$$C^6H^4(CBr=CH^2)^2 \quad 1.2,$$

liquide bouillant à 125°-126° sous 2^{mm}, $d_{23}=1,714$; $n_D^{23}=1,6366$;

2° Le monobromure acétylénique vrai :

$$C^6H^4\begin{cases} CBr=CH^2 & 1, \\ C\equiv CH & 2, \end{cases}$$

liquide bouillant à 127° sous 11^{mm}, $d_{21,5}=1,4105$; $n_D^{21,5}=1,6321$. Il précipite en jaune le chlorure cuivreux ammoniacal, et donne avec le nitrate d'argent alcoolique un précipité dans lequel nous avons trouvé 45,08 pour 100 d'argent (théorie 44,63 pour 100);

3° L'*o*-diacétylénylbenzène :

$$C^6H^4(C\equiv CH)^2 \quad 1.2,$$

liquide bouillant à 82° sous 14^{mm}, $d_{17,5}=0,9788$; $n_D^{17,5}=1,5915$; réfraction moléculaire, 43,63, présentant une exaltation de 2,76. Il cristallise par refroidissement énergique, pour fondre à 20°. Il précipite en jaune le chlorure cuivreux ammoniacal, et donne avec le nitrate d'argent alcoolique un précipité dans lequel nous avons trouvé 63,01 pour 100 d'argent (théorie 63,53 pour 100).

II. Série méta. — La suite des réactions que nous avons effectuées dans cette série est la même que dans la série précédente; voici quelques renseignements sur les corps rencontrés au cours de ce travail :

Dibromhydrine du m-dioxydiéthylbenzène. — Nous n'avons pu encore l'obtenir à l'état de pureté : l'évaporation de la solution chloroformique laisse un liquide huileux, refusant de cristalliser, et que nous n'avons pu

distiller, même sous 2^{mm}, sans décomposition totale. La distillation donne en effet :

1° Du *m*-divinylbenzène :

$$C^6H^4(CH=CH^2)^2 \quad 1.3,$$

carbure d'odeur caractéristique, bouillant à 52° sous 3^{mm}, $d_{22}=0,926$, $n_D^{22}=1,5746$, réfraction moléculaire 46,36 présentant une exaltation de 2,31. Comme le *p*-divinylbenzène que nous avons préparé, il se polymérise rapidement;

2° La monobromhydrine éthylénique :

$$C^6H^4\begin{cases}CHBr-CH^3 & 1,\\ CH=CH^2 & 3,\end{cases}$$

liquide bouillant à 88°,5 sous 3^{mm}, $d_{20}=1,319$, $n_D^{20}=1,5905$ se polymérisant aussi avec rapidité. Ce corps absorbe le brome en donnant un produit renfermant 3 atomes de brome, cristallisant difficilement et fondant à 39°.

La monobromhydrine, distillée sous 3^{mm} avec un excès de quinoléine, donne le *m*-divinylbenzène signalé plus haut.

Le *m*-divinylbenzène absorbe le brome, pour donner un tétrabromure, cristaux fondant à 64°.

m-diacétylénylbenzène. Nous l'avons obtenu par action du tétrabromure précédent sur quatre fois la quantité théorique de potasse dissoute dans trois fois son poids d'alcool.

Ce carbure est un liquide bouillant à 78° sous 15^{mm}, cristallisant par refroidissement, point de fusion —2°,5, $d_{18}=0,9669$, $n_D^{18}=1,5841$, réfraction moléculaire 43,62 présentant une exaltation de 2,85. Il précipite en jaune le chlorure cuivreux ammoniacal, et donne avec le nitrate d'argent alcoolique un précipité dans lequel nous avons trouvé 62,90 pour 100 d'argent; ce précipité fuse, sans fondre, vers 280°.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Recherches sur les oxydes organiques dissociables : un rubrène diméthoxylé.* Note [1] de MM. **Charles Dufraisse** et **Raymond Buret**, présentée par M. Delépine.

La nécessité actuelle de passer par l'intermédiaire des acétyléniques est l'un des obstacles qui s'opposent le plus à l'obtention de rubrènes variés, car la création de triples liaisons n'a encore été réalisée que sur un nombre relativement restreint de molécules, et encore plusieurs des acétyléniques connus ne sont-ils que difficilement accessibles.

Ayant réussi à mettre au point une technique abordable de préparation du *p*-méthoxyphénylacétylène $CH^3-O-C^6H^4-C\equiv CH$, décrit pour

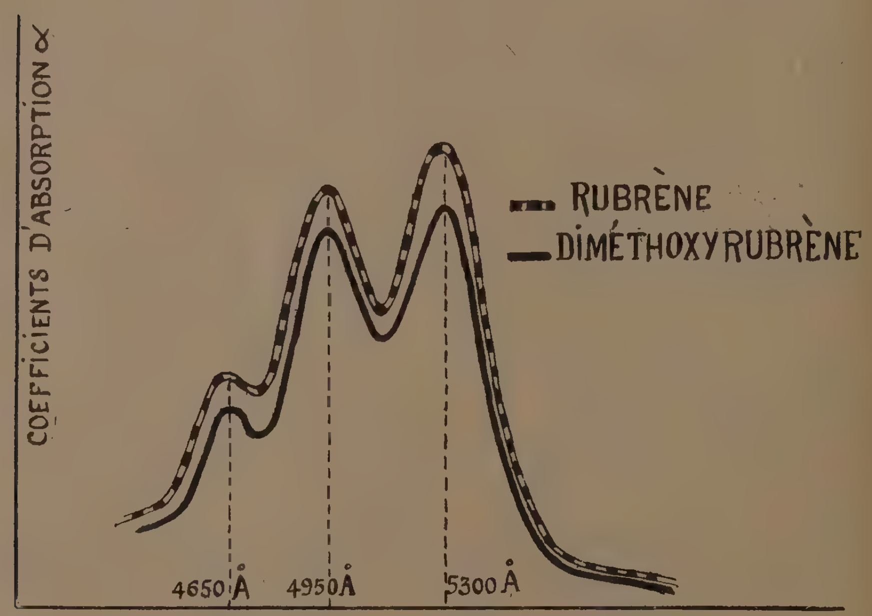
(1) Séance du 26 mai 1931.

la première fois par Reychler, nous avons utilisé ce corps pour la préparation d'un rubrène, portant deux fonctions éther méthylique de phénol.

Nous avons reproduit à partir du corps méthoxylé les diverses transformations qui aboutissent aux rubrènes : carbinol acétylénique

$$(CH^3O)C^6H^4-C\equiv C.C(OH)(C^6H^5)^2$$

(fusion : 67°-68°); éther chlorhydrique correspondant (fusion instantanée : 137°-138°); rubrène diméthoxylé $C^{42}H^{26}(OCH^3)^2$ (fusion instantanée : avec 1/2 C^6H^6 de cristallisation : 238°-239°; sans solvant : 244°-245°.



Spectres d'absorption du rubrène et du diméthoxyrubrène.

Accessoirement, les corps suivants, dérivés des précédents, ont été préparés : éther-oxyde méthylique du carbinol

$$(CH^3O)C^6H^4-C\equiv C-C(OCH^3)(C^6H^5)^2$$

(fusion : 119°-120°), éther oxyde éthylique (fusion : 104°-105°), diphényl-*p*-méthoxybenzoyléthylène $(CH^3O)-C^6H^4-CO-CH=C(C^6H^5)^2$ (fusion : 104°-105°).

Le diméthoxyrubrène présente les plus grandes analogies avec les autres rubrènes précédemment décrits, et spécialement avec le terme le plus

simple, $C^{42}H^{28}$. Il forme des cristaux rouges rubis, donne des solutions orangées, fortement fluorescentes, absorbe la lumière comme le rubrène (voir figure) et enfin, irradié en présence d'oxygène, donne un oxyde dissociable, $C^{42}H^{26}(OCH^3)^2O^2$, C^6H^6.

Voici les nombres concernant la dissociation de l'oxydiméthoxyrubrène :

Poids d'oxyde : $0^{g},2680$; volume de gaz dégagé : $4^{cm^3},80$, solvant recueilli : $0^{g},0265$, résidu : $0^{g},2336$. — Analyse du gaz. Volume à $11^{\circ},5$ après addition d'eau : $4^{cm^3},75$; volume après addition de potasse : $4^{cm^3},63$; volume après addition d'hydrosulfite : $0^{cm^3},10$.

Le gaz recueilli est donc formé d'oxygène dans la proportion de 93 pour 100.

L'introduction de deux groupes méthoxy, —OCH^3, dans la molécule du rubrène ne modifie donc pas les propriétés essentielles de cet hydrocarbure. Seule, la proportion d'oxygène libéré par dissociation de l'oxyde paraît moindre (52 pour 100 de la théorie). Ceci tient, sans doute, à l'attaque des deux substituants par l'oxygène à la température élevée (jusqu'à 200°) où l'on opère : il est déjà très surprenant que de l'oxygène libre puisse apparaître dans de telles conditions.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur les éthers-oxydes monométhylique et monoéthylique du paraxylylène-glycol.* Note (1) de M. **R. Quelet**, présentée par M. Delépine.

L'ω.ω'-dichloroparaxylène, réagissant sur la potasse en solution dans les alcools, fournit, avec des rendements excellents, les éthers-oxydes (2)

$$_{(1)}R - O - CH^2 - C^6H^4 - CH^2 - O - R_{(4)}.$$

Lorsqu'on effectue cette réaction avec une solution de potasse dans l'alcool ordinaire, à 95°, on obtient, à côté de l'éther diéthylique du *p*-xylylène-glycol, une très faible proportion (5 pour 100 environ) de l'éther monoéthylique.

On pouvait supposer que la formation de ce dernier produit était liée à la présence de l'eau et qu'en opérant avec une solution hydroalcoolique de

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) R. Quelet, *Bull. Soc. ch.*, 47, 1930, p. 511.

potasse, d'une concentration convenable, on arriverait à le préparer dans des conditions satisfaisantes. Les recherches que j'ai effectuées dans ce sens n'ont pas confirmé cette hypothèse. Les rendements en diéther diminuent progressivement, lorsqu'on augmente la teneur en eau, mais il se forme des produits de condensation du *p*-xylylène-glycol et l'on n'obtient toujours que de faibles proportions de l'éther monoéthylique. Lorsque le degré alcoolique du mélange tombe au-dessous de 50, il apparaît un abondant précipité jaune, insoluble dans tous les solvants organiques et déjà signalé par Grimaux [1] comme ayant la constitution d'un oxyde condensé du *p*-xylylène-glycol.

L'alcoylation directe du glycol xylylénique permet d'obtenir, avec de faibles rendements, les mono-éthers oxydes. Par exemple, dans le cas où l'agent d'alcoylation choisi est le bromure d'éthyle, on opère de la façon suivante :

Le glycol est sodé par dissolution dans l'alcoolate de sodium et évaporation de l'alcool, puis chauffé pendant deux heures en autoclave, à 130°, avec une quantité équimoléculaire de bromure d'éthyle. Le produit de la réaction est repris par l'eau qui dissout le glycol non transformé; il reste un mélange des éthers diéthylique et monoéthylique. Par distillation, on obtient l'éther monoéthylique pur avec un rendement de 20 pour 100.

Cette méthode étant peu pratique, j'ai cherché à obtenir les mono-éthers par désalcoylation partielle des diéthers qui constituent des matières premières très faciles à préparer. Je suis arrivé à réaliser la transformation par le procédé suivant :

Le diéther, par exemple l'éther diméthylique ($1^{mol},5$), est traité par du chlorure d'acétyle (1^{mol}), en présence d'une trace de chlorure de zinc; il se produit la réaction

(1) $$C^6H^4\begin{cases}CH^2-O-CH^3 & (1)\\ CH^2-O-CH^3 & (4)\end{cases} + CH^3-COCl \rightarrow CH^3-COO-CH^3 + C^6H^4\begin{cases}CH^2Cl & (1)\\ CH^2-O-CH^3 & (4)\end{cases}$$

laquelle, dans ce cas, est presque quantitative.

Le chloro-méthoxy-*p*-xylène ainsi formé ne peut être séparé, par distillation, du dérivé diméthoxylé en excès, car les points d'ébullition de ces deux produits sont extrêmement voisins, mais, à partir de ce mélange, il est facile d'obtenir l'éther monométhylique du paraxylylène-glycol. On peut : 1° saponifier directement par chauffage à 150° avec de la soude étendue; 2° transformer d'abord en éther acétique par chauf-

---

[1] Grimaux, *Bull. Soc. ch.*, 2e série, **14**, 1870, p. 193.

fage avec l'acétate de sodium, suivant le procédé classique, puis traiter par de la soude en solution hydroalcoolique.

Dans les deux cas on récupère, à la distillation, le diéther non transformé et l'on obtient l'éther monoéthylique pur avec des rendements de l'ordre de 50 à 60 pour 100.

Appliquée aux homologues du diméthoxyparaxylène, la réaction (1) donne de moins bons résultats. Au fur et à mesure qu'augmente le poids moléculaire du radical aliphatique, les rendements en dérivé monochloré diminuent et la formation du paradichloroxylène devient rapidement prépondérante.

Voici les propriétés de quelques-uns des nouveaux éthers ainsi obtenus :

Éther monométhylique du paraxylylène-glycol (1) $HO.CH^2.C^6H^4.CH^2.OCH^3$ (4). — Liquide incolore, très visqueux, Éb. sous 16mm : 152°; $d_4^{17} = 1,076$; $n_D^{17} = 1,529$. R. M. trouvée : 43,52; calculée : 43,33. — *Phényluréthane :* aiguilles F. 62°. *Acétate :* liquide incolore, Éb. sous 16mm : 150°; $d_4^{20} = 1,080$; $n_D^{20} = 1,505$. — *Chlorure* (ω-chloro-ω'-méthoxyparaxylène) liquide incolore, très mobile, Éb. sous 17mm : 125°; $d_4^{20} = 1,095$; $n_D^{20} = 1,526$. R. M. trouvée : 47,76; calculée : 46,67.

Éther monoéthylique du paraxylylène-glycol (1) $HO.CH^2.C^6H^4.CH^2.OC^2H^5$ (4). — Liquide visqueux, incolore, Éb. sous 16mm : 154°; $d_4^{17} = 1,047$; $n_D^{17} = 1,520$. R. M. trouvée : 48,10; calculée : 47,95.

En résumé, l'action du chlorure d'acétyle sur l'ω.ω'-diméthoxyparaxylène permet d'obtenir facilement l'éther monométhylique du paraxylylène-glycol; à partir de ce dernier on peut préparer, à l'état pur, l'ω.ω'-chlorométhoxyparaxylène, lequel se prête à d'intéressantes synthèses.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur la préparation de l'hydrobenzoïne et sur le système benzoïne-hydrobenzoïne.* Note de MM. **P. Carré** et **P. Mauclère**, présentée par M. G. Urbain.

L'hydrobenzoïne s'obtient de deux façons principales : 1° par réduction de la benzoïne; 2° par réduction de l'aldéhyde benzoïque.

I. On sait que la réduction de la benzoïne par l'amalgame de sodium donne un rendement médiocre, et que la purification de l'hydrobenzoïne formée dans cette réduction est assez pénible.

Nous avons d'abord examiné l'action sur la benzoïne de quelques agents réducteurs qui permettent, dans certains cas particuliers, de réduire le groupe cétonique en groupement alcool secondaire.

D'après Apitzsch et Metzger (1), la benzoïne serait réduite à peu près quantitative-

(1) Apitzsch et Metzger, *Ber. Deutsch. Chem. Ges.*, 37, 1904, p. 1677.

ment en hydrobenzoïne par le chlorure stanneux en solution chlorhydrique alcoolique. Nous n'avons pu obtenir d'hydrobenzoïne par cette méthode. Lorsqu'on chauffe au bain-marie, pendant une heure environ, la solution alcoolique de benzoïne, légèrement jaunâtre, additionnée d'une solution de chlorure stanneux dans l'acide chlorhydrique, la solution est bien décolorée comme l'indiquent Apitzsch et Metzger, mais on retrouve toute la benzoïne inaltérée (semicarbazone, F. 220°).

Si l'on effectue la réduction par l'étain et l'acide chlorhydrique, le groupement alcool est réduit avant le groupement cétonique, car une réduction ménagée donne d'abord de la désoxybenzoïne. Cette dernière se forme également quand on réduit la benzoïne par le couple zinc-cuivre et la soude. La réduction de la benzoïne par l'amalgame d'aluminium en milieu légèrement acide par l'acide sulfurique ne permet pas non plus d'obtenir l'hydrobenzoïne; il se forme un mélange de divers produits qui n'ont pu être séparés.

La réduction de la benzoïne en hydrobenzoïne, au moyen des dérivées organomagnésiens, signalée par divers auteurs, constitue un mode de formation plutôt qu'un mode de préparation.

Nous nous sommes enfin adressé à l'hydrogénation catalytique de la benzoïne.

Cette hydrogénation ne peut être réalisée à la pression et à la température ordinaires, ni en présence du nickel réduit, ni en présence du platine. Par contre, ainsi que l'ont montré Adkins et Cramer (¹) pour un grand nombre de cétones, l'hydrogénation peut être réalisée avec un excellent rendement en hydrobenzoïne, en présence du nickel réduit, à chaud et sous pression. Quand on chauffe entre 125 et 160°, une solution alcoolique de benzoïne bien pure avec l'hydrogène, sous 150^{atm} environ, pendant 4 à 5 heures, en présence du nickel réduit à 280°, on obtient l'hydrobenzoïne avec un rendement de 80 à 90 pour 100. Il faut avoir soin d'hydrogéner une benzoïne pure, parfaitement débarrassée de toute trace du cyanure ayant servi à sa préparation, car la moindre trace de cyanure arrête l'hydrogénation. Cette hydrogénation constitue le meilleur mode de préparation de l'hydrobenzoïne inactive. On obtient ainsi très facilement une hydrobenzoïne pure, F. 134°, et donnant une diphényluréthane, F. 232-233° (mélange avec la diphénylurée, F. 220°).

Nous avons été conduit à déterminer le diagramme thermique du système benzoïne-hydrobenzoïne, utile à connaître pour suivre l'hydrogénation de la benzoïne.

(¹) Adkins et Cramer, *Journ. Am. Chem. Soc.*, 52, 1930, p. 4954.

Composition moléculaire du mélange.		Température de solidification commençante.
Benzoïne.	Hydrobenzoïne.	
10	0	132°
9	1	126
8	2	116
7	3	108,5
6	4	99
5	5	105
4	6	112
3	7	119
2	8	124,5
1	9	130
0	10	134

La benzoïne et l'hydrobenzoïne forment donc un mélange eutectique, F. vers 99°, pour 4^{mol} d'hydrobenzoïne et 6^{mol} de benzoïne environ.

II. La réduction de l'aldéhyde benzoïque en hydrobenzoïne au moyen du zinc et de l'acide chlorhydrique, signalée par Zinin (1), a été utilisée par Danilow (2) pour la préparation de l'hydrobenzoïne. Ce procédé donne en effet facilement de l'hydrobenzoïne, mais avec un rendement moins élevé que l'hydrogénation catalytique de la benzoïne. De plus il se forme, à côté de l'hydrobenzoïne, une substance non signalée par Danilow et qui rend moins facile la purification de la totalité de l'hydrobenzoïne formée. Ce produit secondaire, purifié par cristallisation dans l'alcool, répond à la formule $C^{14}H^{12}O$; il fond à 85° et est différent des deux formes stéréoisomères de l'oxyde de diphényléthylène, respectivement F. 69° et 42°, décrites par Rabe et Hallensleben (3).

CHIMIE ORGANIQUE. — *Méthyl-1-éthyl-2-cyclopropane*. Note de MM. **Lespieau** et **Réginald L. Wakeman**, présentée par M. Matignon.

Notre but, en préparant ce nouveau carbure par une méthode employée déjà pour arriver au diméthyl-1.2-triméthylène, a été d'abord de voir si cette méthode fournit des dérivées cyclopropaniques exempts de carbures

(1) Zinin, *Ann. Lieb.*, 123, 1862, p. 125.
(2) Danilow, *Ber. Deutsch. Chem. Ges.*, 60, 1927, p. 2393.
(3) Rabe et Hallensleben, *Ber. Deutsch. Chem. Ges.*, 43, 1910, p. 884.

éthyléniques, puis, s'il en était ainsi, de voir quelle exaltation du pouvoir réfringent moléculaire présenterait le carbure obtenu.

On peut craindre en effet la présence d'oléfines dans certains carbures triméthyléniques déjà décrits, présence qui serait de nature à nous induire en erreur sur les véritables propriétés de ces carbures cycliques.

Or l'effet Raman nous offre un moyen d'une grande sensibilité permettant d'élucider cette question de présence ou d'absence.

Notre point de départ a été le 2.4-hexanediol, découvert par Franke et Kohn (*Monatshefte*, 27, 1906, p. 1111), sur lequel ils n'ont pas donné d'autre renseignement que le point d'ébullition. Ce glycol s'obtient en faisant agir l'aldol sur le bromure d'éthylmagnésium ; l'aldol que nous avons utilisé a été fait par le procédé de Kyriakidès (*Amer. Ch. Soc. J.*, 36, 1914, p. 532), en n'effectuant pas cependant la distillation finale, car celle-ci détruit une quantité importante d'aldol. Il est vrai qu'alors on a un aldol riche en paraldol, mais ce n'est point une gêne pour la réaction magnésienne.

L'hexanediol-2.4, auquel nous sommes arrivés, bouillait à 104°,5-105°,5 sous 9^{mm} ; nous avons fait sur lui les mesures suivantes : C pour 100, 60,71 ; H pour 100, 12,22 ; poids moléculaire par cryoscopie acétique, 120 ; $d_4^{21} = 0,9516$; $n_D^{21} = 1,4418$; réfraction moléculaire, 32,83 (théorie, 32,76). Ce glycol n'est que partiellement miscible à l'eau.

Dibromo-2.4-*hexane*. — Il résulte de l'action poussée jusqu'à 140°, du tribromure de phosphore, additionné d'un peu de pyridine, sur le glycol précédent. C'est un liquide incolore, non piquant, bouillant à 81°,5-83° sous 10^{mm}. Les propriétés sont les suivantes : brome pour 100, 65,89 ; poids moléculaire par cryoscopie acétique, 238 ; $d_4^{22} = 1,5756$, $n_D^{22} = 1,4985$; réfraction moléculaire, 45,44 (théorie, 45,47).

Méthyl-1-*éthyl*-2-*cyclopropane*. — Ce carbure s'obtient en attaquant le dibromure précédent par la poudre de zinc au sein de l'alcool à 95°, maintenu au voisinage de son point d'ébullition. Le rendement atteint 68 pour 100 du rendement théorique.

C'est un liquide incolore, bouillant à 63°,9 - 64°,9 sous la pression normale. Les mesures que nous avons faites sur lui ont donné : C pour 100 : 84,77 ; H pour 100 : 14,88 ; poids moléculaire par cryoscopie acétique : 86,3 ; $d_4^{21} = 0,6961$; $n_D^{21} = 1,3874$; réfraction moléculaire : 28,47 (théorie : 27,62) ; donc une exaltation de 0,85. Point critique de dissolution dans l'aniline : 42°.

L'étude du spectre de Raman de ce carbure a été faite sur un cliché très

poussé ; la présence d'un corps éthylénique aurait entraîné sur ce cliché l'existence d'une raie de fréquence 1620 ou environ (nombre d'ondes par centimètre), qui n'aurait pu échapper à la vue, car d'une part elle est toujours isolée quand il s'agit d'un carbure, et de l'autre elle est toujours forte (c'est la plus forte du spectre en général). Or on n'a pu déceler aucune raie dans cette région du cliché, alors que la raie la plus voisine présente, la raie 1454 des CH^2, s'y trouve très opaque.

Nous sommes donc en droit de conclure que notre composé était exempt de carbure éthylénique. Or à ce point de vue il est intéressant de noter qu'il décolore le permanganate (mais moins rapidement, semble-t-il, que le diméthyltriméthylène de Zelinsky).

En ce qui concerne la réfraction moléculaire observée par nous, son exaltation n'étant pas attribuable au fait que notre carbure aurait contenu un isomère éthylénique dont nous n'aurions pas tenu compte, il faut l'attribuer au noyau triméthylénique. Mais si l'on compare entre elles les exaltations rencontrées chez les carbures possédant cette chaîne fermée on ne voit se dégager aucune régularité, même en faisant un choix arbitraire parmi les nombres assez divergents fournis par divers auteurs et parfois par le même pour un même corps.

CHIMIE ORGANIQUE. — *La β-éthylnaphtaline et ses produits d'hydrogénation.* Note [1] de M. **Georges Lévy**, présentée par M. A. Desgrez.

Les homologues de la naphtaline présentent un intérêt tout particulier depuis qu'ils ont été trouvés parmi les produits de dégradation de principes immédiats du règne végétal; nous avons en conséquence entrepris l'étude des éthylnaphtalines encore peu connues et nous résumons ici nos premières recherches sur la β-éthylnaphtaline.

Ce carbure a déjà été préparé par différents procédés : Marchetti emploie la réaction de Friedel et Crafts sur la naphtaline et il obtient un carbure incristallisable dont le picrate fond à 71° [2]. Brunel utilise la synthèse de Fittig appliquée à la β-bromonaphtaline et au bromure d'éthyle, le carbure obtenu cristallise et son picrate fond à 69° [3]. M. G. Darzens réduit

---

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) Marchetti, *Gazetta chimica italiana*, 11, 1881, p. 265, 439.

(3) Brunel, *Berichte d. chem. Gesell.*, 17, mai 1884, p. 1180.

la β-acétylnaphtaline par l'hydrogène en présence de nickel (1); enfin M. Barbot a indiqué récemment la déshydrogénation de la tétrahydro-éthylnaphtaline obtenue par la réaction de Friedel et Crafts sur la tétraline. Le carbure ainsi obtenu cristallise et son picrate fond à 73° (2).

Afin d'avoir un carbure parfaitement pur, nous nous sommes adressés à la méthode de M. G. Darzens, procédé qui a l'avantage de partir de la β-acétylnaphtaline, produit solide et facile à purifier par cristallisation dans l'alcool, ce qui élimine la possibilité d'avoir un produit souillé de l'isomère α.

De la β-acétylnaphtaline (F = 53°,5) en solution dans son poids de benzine est écoulée lentement à 200° sur du nickel supporté par de la ponce et obtenu par réduction de l'oxyde à 360°. Dans ces conditions le groupe $-CO-CH^3$ est facilement réduit en $-C^2H^5$; mais, malgré l'emploi d'un nickel obtenu à température élevée, il se forme toujours un peu de dérivé tétrahydrogéné et il est nécessaire de purifier le produit en le combinant à l'acide picrique qui ne se combine pas au tétrahydrure. Le picrate cristallisé est ensuite décomposé par la soude étendue pour régénérer la β-éthylnaphtaline pure.

Ainsi préparée la β-éthylnaphtaline présente les constantes suivantes :

$D_0^0 = 1{,}0069$, $D_4^{15} = 0{,}9958$, $n_D^{15} = 1{,}6028$. R. M. trouvée : 53,79; calculée : 50,88.

On voit que l'exaltation de la réfraction moléculaire est considérable, ce qui est de règle pour les carbures naphtaléniques.

Ce carbure cristallise facilement et son point de fusion est de — 7°,5; il distille à 252° (non corrigé) sous 760mm; son picrate fond à 76°-77°. Ces constantes notablement plus élevées que celles qui avaient été données précédemment montrent que le carbure ainsi obtenu est particulièrement pur.

L'hydrogénation, par le sodium et l'alcool amylique bouillant selon la technique de Bamberger et Kitschef (3), de la β-éthylnaphtaline ne nous a permis de préparer, contre toute attente, qu'un dihydrure de formule $C^{12}H^{14}$. Ce carbure présente les caractères d'un carbure éthylénique; il décolore instantanément le brome en solution chloroformique, même à — 10°, et fixe sensiblement Br^2 sans dégagement de HBr. Ses constantes sont les suivantes :

Point d'ébullition = 241° sous 760mm (non corrigé), 119° sous 17mm;
$D_0^0 = 0{,}9772$, $n_D^{13,3} = 1{,}5551$.

---

(1) Darzens et Rost, *Comptes rendus*, 146, 1908, p. 934.

(2) Barbot, *Bulletin de la Société de Chimie*, 4e série, 48, novembre 1930, p. 1317.

(3) Bamberger et Kitschel, *Berichte d. chem. Gesell.*, 23, 1890, p. 1561.

Le fait que cette hydrogénation se limite au dihydrure est remarquable, car dans les mêmes conditions, la naphtaline donne directement un tétrahydrure.

Par hydrogénation catalytique à 200° sur du nickel réduit à 280°, on obtient par contre un tétrahydrure $C^{12}H^{16}$ distillant à 114-115° sous 16mm. C'est un liquide incolore, entièrement sulfonable, ne décolorant pas instantanément le brome en solution chloroformique, mais décolorant le permanganate en solution sulfurique; il présente les constantes suivantes :

$$D_0^0 = 0,9542; \quad D_4^{15} = 0,9447; \quad n_D^{15} = 1,5287.$$

Point d'ébullition sous 760mm : 237° (corrigé). R. M. trouvée : 52,20; calculée : 51,81.

Ces constantes sont notablement différentes de celles données par MM. Bœdtker et Rambech [1] pour une éthyltétraline préparée par la réaction de Friedel et Crafts sur la tétraline. Nous en concluons que notre carbure est hydrogéné du côté du groupe C^2H^5 et qu'il a la formule I alors que le carbure de MM. Bœdtker et Rambech a sans doute possible la formule II :

CH — CH² ; HC — C — CH—C^2H^5 ; HC — C — CH² ; CH — CH²

I.

CH — CH² ; C^2H^5C — C — CH² ; HC — C — CH² ; CH — CH²

II.

Des recherches en cours nous permettront de préciser ces constitutions.

Une hydrogénation plus énergique, en écoulant le tétrahydrure à 160° et à la vitesse de 1 à 2g par heure sur un nickel particulièrement actif, obtenu par réduction de l'oxyde à 250°, nous a permis finalement d'obtenir le décahydrure qui peut être purifié et séparé du tétrahydrure par l'action de l'acide sulfurique concentré. Cette β-éthyldécaline est un liquide très peu odorant qui distille à 221° (corrigé) sous 760mm et à 92° sous 13mm. Les constantes sont :

$$D_0^0 = 0,8857; \quad D_4^{13,2} = 0,8763; \quad n_D^{13,2} = 1,4746.$$

R. M. trouvée : 53,29; calculée : 53,22.

Remarquons en terminant que l'hydrogénation a pour effet de faire disparaître l'exaltation de la réfraction moléculaire.

---

[1] Bœdtker et Rambech, *Bulletin de la Société de Chimie*, 4e série, 35, 1924, p. 634.

MINÉRALOGIE. — *Transformations de la braunite sous l'action de la chaleur.* Note [1] de M. **St. Pavlovitch.**

La braunite est essentiellement un oxyde de manganèse de la forme Mn^2O^3 cristallisant souvent en beaux octaèdres quadratiques, mais les analyses d'échantillons provenant de différents gisements mettent toutes en évidence des proportions de silice notables et parfois importantes (4 à 11 pour 100), qui ont donné lieu à des interprétations variées; elles consistent principalement à envisager ce minéral comme un mélange $(3Mn^2O^3.SiO^3Mn)$ de l'oxyde Mn^2O^3 et d'un métasilicate de manganèse.

L'étude microscopique en sections polies [2] de la braunite montre que cet oxyde est parfaitement homogène; la silice qu'il renferme fait donc bien partie de l'édifice cristallin, et il était intéressant de rechercher ce qu'elle devient quand une partie de l'oxygène se dégage sous l'action de la chaleur.

Ce dégagement a été constaté par A. Gorgeu [3], mais après chauffage dans l'air, sans détermination de la température et sans examen microscopique du résidu.

J'ai opéré dans des conditions plus précises. Pour cela, des fragments du minéral placés dans une nacelle de platine à l'intérieur d'un tube de silice fondue ont été chauffés à l'aide d'un four à résistance de platine permettant d'atteindre 1400°C. Le tube était parcouru par un courant d'azote, afin d'éviter l'oxydation de la substance. La température était déterminée au moyen d'un couple thermo-électrique (platine-platine rhodié) dont la soudure était maintenue au contact de la nacelle.

Les cristaux de braunite étudiés proviennent de Kacharwahi (Indes anglaises). Leur teneur en silice a été déterminée à nouveau; elle est de 8,92 pour 100 et correspond sensiblement à celle indiquée par L. L. Fermor [4]. Plusieurs plaquettes carrées de 2^{mm} d'épaisseur et de 5^{mm} de côté ont été découpées dans ces cristaux; les sections ainsi obtenues ont été polies en vue de l'examen au microscope métallographique polarisant qui a

---

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) J. Orcel et St. Pavlovitch. *Sur les caractères microscopiques des oxydes de manganèse naturels* (*Comptes rendus*, **187**, 1928, p. 1295-1297).

(3) A. Gorgeu. *Sur les oxydes de manganèse naturels* (*Bull. Soc. franç. Min.*, **16**, 1893, p. 146).

(4) L. L. Fermor, *Mem. of geol. Survey of India*, **39**, 1909, p. 68.

montré leur parfaite homogénéité. Leur densité mesurée par la méthode de la balance hydrostatique est de 4,81.

Après chauffage à 900°, pendant 6 heures, il ne se produit ni changement de la surface ni perte de poids.

En continuant le chauffage jusqu'à 1190° pendant 5 heures environ, leur poids n'a pas encore varié, et l'on voit au microscope qu'elles n'ont pas changé de nature, mais elles ne forment plus un cristal unique. Elles sont constituées par un agrégat de plages ayant conservé les propriétés optiques de la braunite initiale; d'ailleurs leur comportement vis-à-vis des réactifs d'attaque est encore celui de ce minéral.

A la suite d'un chauffage à 1400° pendant 4 heures, il se produit un dégagement d'oxygène; la perte en poids est de 3,8 pour 100. On constate alors que les plaquettes sont fondues à leur partie inférieure; l'examen de sections minces fait voir qu'elle est constituée uniquement par un agrégat de cristaux de *téphroïte* (Mn^2SiO^4). Quant à la partie supérieure, elle a subi un ramollissement marqué; on y trouve aussi de la téphroïte, mais en petite quantité : elle forme une association eutectoïde avec un minéral opaque; celui-ci n'est plus de la braunite, mais de la hausmannite (Mn^3O^4). Elle se présente à l'état de cristaux quadratiques à macles polysynthétiques agissant vivement sur la lumière polarisée; tous les autres caractères optiques sont bien ceux de la hausmannite (notamment les pouvoirs réflecteurs en lumière blanche mesurés à l'aide de la cellule photo-électrique sont : 0,157 et 0,175); il en est de même pour leurs caractères d'attaque par les réactifs.

L'attaque à chaud par l'acide nitrique à 20 pour 100 d'un échantillon transformé comme il vient d'être dit permet de mettre en solution la téphroïte, sans dissoudre sensiblement la hausmannite; il reste une masse spongieuse de ce minéral dont le poids représente 70 pour 100 de la masse primitive. Les 30 pour 100 de téphroïte dissous correspondent bien à la teneur en silice trouvée par analyse (le calcul donne 29,6 pour 100).

Quand on chauffe la braunite dans l'air, il ne se produit que la seconde transformation entre 1200° et 1400° C., mais la perte en poids de la substance est plus faible (2,78 pour 100), probablement par suite d'équilibres avec l'oxygène de l'air.

Il résulte de cette étude que la braunite ne peut être considérée comme l'équivalent naturel cristallisé de l'oxyde Mn^2O^3 pur, ni comme sa combinaison ou son mélange à un métasilicate de manganèse. L'hypothèse la plus vraisemblable consiste à admettre que la braunite est l'oxyde Mn^2O^3,

dans quoi une partie du manganèse est remplacée par du silicium; sa formule doit donc s'écrire : $(Mn, Si)^2O^3$. Le départ de l'oxygène sous l'action de la chaleur détruit l'équilibre, probablement très instable de ce remplacement, et provoque la séparation du silicium à l'état de téphroïte.

HYDROLOGIE. — *Contribution à l'étude de l'origine des eaux souterraines.* Note de M. F. **Diénert.**

Pendant longtemps les hydrologues français considéraient les pluies comme l'unique origine des eaux souterraines. Ils admettaient difficilement les théories allemandes et suisses sur l'alimentation des réseaux aquifères souterrains par la condensation de la vapeur d'eau atmosphérique. Au Congrès de l'eau, à Alger, en 1929, les conceptions allemandes furent fermement défendues par certains hydrologues français.

L'explication donnée par l'École française sur l'origine des eaux dans le sous-sol est la plus simple et la plus ancienne. Elle est combattue par les Allemands pour la raison suivante. Les pluies s'infiltrent bien dans le sol, mais l'évaporation subséquente dépasse en amplitude la quantité d'eau infiltrée. Cette conclusion est contestable. Elle est généralement basée sur les résultats de l'évaporation d'une surface liquide exposée à l'air libre. Or l'évaporation des eaux contenues dans le sous-sol y est certainement bien plus difficile.

Pour l'école allemande une autre preuve de l'exactitude de sa théorie repose sur l'expérience suivante : On enfouit dans du sable, c'est-à-dire dans le sol, un plateau métallique disposé horizontalement au-dessus d'un récipient destiné à recevoir les eaux de pluie infiltrées. Jamais on ne récolte d'eau dans ces conditions. J'ai répété cette expérience et n'ai obtenu, comme les Allemands, que des résultats négatifs.

En analysant toutes les conditions de l'expérience, j'ai constaté qu'on avait oublié de se prémunir contre les effets de la capillarité.

En effet l'eau infiltrée, arrivant au-dessus du plateau, ne peut sortir du sable que si elle peut rompre les forces de la capillarité. Or, de chaque côté du plateau elle trouve, à travers le sable, un chemin d'écoulement plus facile et s'échappe, par ce moyen, au-dessous du plateau. Dans le récipient destiné à recevoir l'eau de pluie infiltrée on ne doit rien recueillir. Si notre raisonnement est exact il suffit d'entourer le sable, situé au-dessus du plateau et sur une hauteur de l'ordre de grandeur de la charge due à la capilla-

rité, d'une couronne de cailloux assez gros pour empêcher les effets de celle-ci. C'est alors sur le plateau que l'eau trouvera le chemin de moindre résistance. Dans ces conditions nous avons pu récolter l'eau de pluie infiltrée, environ 45 pour 100 de la quantité tombée sur du sable de 1 à 2^{mm} et pendant des périodes où la température de l'air extérieur atteignait 33° C.

Suivant la façon dont tombe la pluie, l'arrivée de l'eau sur notre plateau est plus ou moins rapide. En moyenne la vitesse d'écoulement est dans les environs de $0^{m},50$ par jour. La pluie cessant l'égouttement du sable se prolonge pendant plusieurs jours. Sur notre plateau ayant $0^{m},50$ de diamètre nous récoltons ainsi, d'une façon régulière, de 100 à 150^{cm^3} d'eau d'égouttage.

Nos expériences actuelles ont été faites en utilisant le sable. Nous nous proposons d'étudier de la même façon différents matériaux et en particulier la terre végétale, à travers laquelle l'eau doit circuler encore plus lentement.

De nos expériences faites dans la région parisienne il ne subsiste aucun doute possible que la pluie, s'infiltrant dans les sables, peut alimenter les eaux souterraines de cette région. La théorie de l'École française est donc bien démontrée. La question est à l'étude en ce qui concerne les terrains africains.

Mais la condensation de la vapeur d'eau atmosphérique ne peut-elle pas, elle aussi, contribuer à cette alimentation?

Nos expériences, actuellement en cours, peuvent se résumer ainsi : la vapeur d'eau atmosphérique ne peut contribuer à l'alimentation des eaux souterraines que si la circulation de l'air, dans le sol, est facile et de débit suffisamment abondant. La diffusion de la vapeur d'eau à travers le sable est un phénomène trop lent. La condensation de la vapeur d'eau est uniquement régie par la température du sous-sol. Il s'agit de déterminer l'importance de la circulation de l'air dans le sol. C'est le problème que nos expériences en cours permettront de résoudre. A ce moment seulement nous pourrons dire si la théorie de l'École allemande peut être admise ou être rejetée définitivement.

HYDRAULIQUE SOUTERRAINE. — *Sur les débits des sources en régime non influencé.* Note [1] de M. **Montagné**, présentée par M. Jouguet.

La plupart des traités d'hydraulique exposent la loi de superposition des courbes des débits en fonction du temps en régime non influencé. D'après cette loi, et sans qu'il soit spécifié qu'elle s'applique uniquement à des terrains entièrement perméables et homogènes, il suffit chaque année, dès que la source ne reçoit plus d'apports, de mesurer son débit, de déterminer l'ordonnée de la courbe qui représente les débits en régime non influencé en fonction du temps pour obtenir, au delà de cette ordonnée, ses débits successifs à toutes les époques de la saison sèche.

La loi de superposition paraît évidente. Si nous nous plaçons, en effet, dans le cas d'un terrain très perméable et homogène, la charge se transmet régulièrement de haut en bas quand le niveau hydrostatique varie et la nappe se trouve dans le cas d'un réservoir non alimenté qui se vide par un orifice dont la section est invariable. A un débit donné correspondent une charge et un volume déterminés, toujours les mêmes quel que soit l'instant auquel on commence la vidange. A partir de cet instant, la décroissance du débit sera invariable. Nous devons faire remarquer en outre que les théories sur les débits des nappes sont basées sur l'hypothèse qu'à un débit donné correspond un volume déterminé de la nappe.

De l'année 1922 à l'année 1929 nous avons vérifié la loi de superposition des courbes pour un ensemble de sources et, indirectement, l'hypothèse ci-dessus. Les écarts constatés pouvaient être attribués aux différences des évaporations ou à quelques pluies qui maintenaient, plus ou moins, l'humidité du sol et n'étaient donc pas d'importance à justifier d'autres recherches. Nos courbes de débits sont tracées d'après les lectures journalières contrôlées faites sur une échelle hydrométrique du Service des Forces hydrauliques du Sud-Ouest située à Niort (Aude) et soigneusement tarée chaque année par nous après des jaugeages au moulinet.

Par contre, après l'automne de 1929 et l'hiver et le printemps de 1930, exceptionnellement pluvieux, la courbe de décroissance en régime non influencé est loin de se superposer à celles des autres années et l'écart entre

---

[1] Séance du 26 mai 1931.

les courbes est si grand que l'on peut affirmer qu'elles ne présentent entre elles aucune ressemblance.

Nous avons constaté de semblables différences dans d'autres bassins et même pour certaines sources du bassin de la Seine comme celles de Cérilly et de la Dhuis dont les données, remontant à l'année 1881, sont bien établies et sont devenues classiques.

Puisque, pour un grand nombre de sources, les courbes ne se superposent pas quand les écarts pluviométriques sont grands, c'est qu'il n'est pas possible de généraliser l'hypothèse d'après laquelle un volume déterminé de la nappe correspond à un débit donné.

Nous allons publier par ailleurs les documents qui nous permettent d'établir et de vérifier expérimentalement pour certaines sources [Rébenty à Niort (Aude), Cérilly, Dhuis] la relation simple qui caractérise le débit en parallèle :

$$\frac{q}{q+q_1}=\frac{q'}{q'+q'_1},$$

dans laquelle q et q_1 sont les débits respectifs au moment t_0 où le débit en régime non influencé de deux nappes commence, q' et q'_1 les débits respectifs après un temps t_1. Cette relation est celle que l'on obtient en cumulant les débits de nappes dont la décroissance est proportionnellement la même. Elle permet de calculer le débit total au temps t_1 en partant du débit total initial et de la courbe de décroissance d'une année quelconque.

Nous pensons que la relation ci-dessus est applicable lorsque les terrains ne sont pas homogènes et que, les nappes étant en quelque sorte cloisonnées, certaines de leurs parties, dont le nombre est d'autant plus grand que le niveau hydrostatique est plus élevé, donc que l'année est plus pluvieuse, débitent dans l'émissaire commun ou à l'extérieur — sources éphémères bien connues. Il n'y a donc plus, dans ce cas, un seul débit auquel correspond un volume déterminé mais plusieurs débits, cumulés, auxquels correspondent d'autres volumes, variables selon les années.

Pour d'autres sources les résultats sont intermédiaires entre le débit en parallèle et la superposition des courbes, sans que nous puissions connaître la répartition très complexe des terrains et des eaux dans le sein des montagnes.

BOTANIQUE. — *Sur l'évolution des constituants cytoplasmiques des cellules polliniques du* Vincetoxicum officinale. Note [1] de Mlle **Germaine Py**, présentée par M. L. Mangin.

La fleur des *Vincetoxicum officinale* présente, comme celle de la plupart des Asclépiadacées, la particularité intéressante d'avoir des grains de pollen réunis en une pollinie entourée d'une membrane jaune brunâtre.

Dans les jeunes boutons floraux, les cellules mères de formes allongées et en petit nombre (4 ou moins) sont alignées en une seule file entourée par les cellules nourricières. Elles possèdent à chacune de leurs extrémités une grosse vacuole, et en leur milieu un noyau volumineux occupant presque toute la largeur de la cellule. Leur chondriome est formé de mitochondries et de courts chondriocontes. Ces cellules grossissent, les deux vacuoles se fragmentant souvent pour en donner plusieurs autres qui restent localisées dans la région des pôles. Mais au début de la prophase réductrice, au stade synapsis, elles se répartissent sans ordre dans tout le cytoplasme et le chondriome semble alors présenter un plus grand nombre de chondriocontes.

C'est généralement au moment de la formation des jeunes grains de pollen que certains éléments du chondriome se différencient en plastes : les uns prennent des formes en massue, en têtard, la partie renflée présentant bientôt un centre clair ayant l'apparence d'une vésicule, puis grossissent et se transforment en une masse mûriforme; les autres s'allongent, s'épaississent, se courbent en S ou en U et les parties comprises dans leur concavité apparaissent, dans les préparations colorées à l'hématoxyline, d'un gris nacré. Lorsque cette différenciation est achevée, les grains de pollen contiennent un grand nombre de mitochondries granuleuses et les deux formes de plastes décrites plus haut, tous les intermédiaires étant du reste visibles entre elles (*fig.* 1).

Les réactions à l'iodo-iodure et à l'acide osmique n'ont jamais indiqué d'amidon ni de graisse dans ces éléments qui sont sans doute chargés de protéines et représenteraient donc des protéoplastes. Ils offrent, en effet, une grande analogie avec ceux décrits par Guilliermond [2] dans le sac

---

[1] Séance du 26 mai 1931.

[2] Guilliermond, *Recherches sur l'évolution du chondriome* (*Ann. Sc. Nat. Bot.*, 6, 1924, p. 5).

embryonnaire des Liliacées. Guignard [1] a, d'ailleurs, signalé la présence de protéoplastes chez de nombreuses Asclépiadacées (*Asclepias syriaca*, *A. Curassavica*, *A. linifolia*, *Gomphocarpus*, etc.); or, il est intéressant de noter qu'il avait indiqué l'absence de ces formations chez les *Vincetoxicum* et qu'il assigne à celles-ci, dans les objets étudiés par lui, des caractères sensiblement différents de ceux observés par nous chez le Dompte-Venin; sans doute, les protéoplastes présentent-ils dans la famille des Asclépiadacées des comportements très divers.

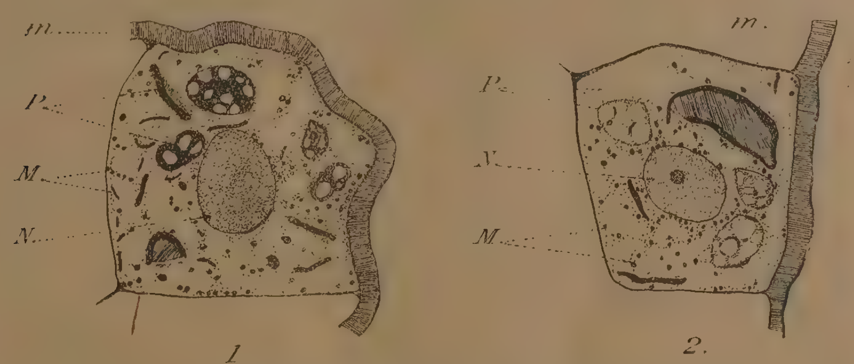


Fig. 1. — Jeune grain de pollen avec plastes.
Fig. 2. — Jeune grain de pollen avec plastes commençant à disparaître.
P, plastes; M, mitochondries; N, noyau; *m*, membrane, non encore subérifiée, de la pollinie.

Il paraît, en outre, intéressant de signaler que les plastes en forme de S ou de U décrits plus haut, ressemblent d'une façon frappante aux lépidosomes remarqués par Parat [2] dans la spermatogénèse de l'*Helix pomatia* et surtout à ceux observés par Radu [3] dans le canal déférent de l'*Armadillidium vulgare*. Et peut-être doit-on se demander s'il ne conviendra pas d'assimiler les lépidosomes de Parat à des protéoplastes.

Pendant la maturation des grains de pollen, les plastes perdent peu à peu leur chromaticité (*fig.* 2) pour ne plus se distinguer bientôt du reste du cytoplasme, et le grain du pollen mûr, avec ses trois noyaux, a un chondriome constitué de mitochondries, de chondriocontes et de petits plastes à peine plus gros que les mitochondries granuleuses.

---

(1) Guignard, *Sur l'existence de corps protéiques particuliers dans le pollen de diverses Asclépiadacées* (*Comptes rendus*, 175, 1922, p. 1015).

(2) Parat, *Contribution à l'étude morphologique et physiologique du cytoplasme de la cellule animale* (*Thèse*, Paris; 1928).

(3) Radu, *Structure histologique et cytologique du canal déférent chez* Armadillidium vulgare *Latr.* (*Arch. de Zoo. exp. et gen.*, 70, 1930, p. 1 à 14).

PATHOLOGIE VÉGÉTALE. — *Action des circuits oscillants sur la dégénérescence des pommes de terre.* Note [1] de M. **Labergerie**, présentée par M. L. Mangin.

A la suite des Communications présentées récemment [2] par M. Jaguenaud, concernant l'influence de la nature géologique du sol et des conditions d'altitude sur la dégénérescence des pommes de terre, phénomènes qu'il explique par les travaux et les théories de M. Georges Lakhovsky, je viens apporter la confirmation de sa thèse, ayant entrepris moi-même sur différents végétaux, notamment sur les pommes de terre, des recherches avec les circuits oscillants, selon les méthodes de M. Lakhovsky.

Depuis 1926 j'ai cultivé des pommes de terre dans ce but à l'École d'Agriculture de Montpellier et dans le Jardin de la Société d'Horticulture de l'Hérault, situés à faible altitude sur des sols argilo-calcaires très compacts, dont la teneur en argile dépasse 50 pour 100 dans certaines stratifications.

Les essais ont porté notamment sur l'espèce « Commersoni Violet », qui préfère les terrains siliceux, et, à titre de comparaison, sur la « Géante bleue » et l'« Institut de Beauvais », qui sont mieux adaptées aux terrains calcaires.

Les variétés expérimentées ont, en général, été défavorablement affectées par la nature de ce sol, en particulier l' « Early Rose » et la « Géante bleue ». Cette dernière pourrissait avec une rapidité déconcertante, soit dans le sol, soit après récolte. Les autres espèces se défendirent mieux : « Hollande », « Institut de Beauvais », « Commersoni Violet ». Celle-ci présente une diminution de vigueur considérable avec décoloration plus ou moins complète de l'épiderme.

Des essais ont été faits autour d'un certain nombre de pieds de pommes de terre avec circuit oscillant en cuivre. Les résultats ont été très favorables sur plusieurs dizaines de pieds, chaque année, de 1926 à 1930.

La nature du métal joue un rôle considérable dans l'influence de ces circuits. Nous avons fait des essais comparatifs avec des circuits d'aluminium, nickel et plomb.

---

[1] Séance du 26 mai 1931.

[2] *Comptes rendus*, **192**, 1931, p. 582, et *Académie d'Agriculture*, **17**, 1931, p. 218.

Avec l'aluminium, on enregistre une diminution très nette de la production.

Avec le plomb, on constate une augmentation de la tubérisation et une tendance exagérée à la pourriture après arrachage.

Sur tous les pieds munis d'une façon constante de circuits de Lakhovsky, nous avons remarqué l'absence totale de destruction des tubercules par les ravageurs souterrains (rats, courtillières, etc.), tandis que les tubercules des pieds témoins étaient presque entièrement détruits par ces animaux.

Les récoltes en tubercules provenant des divers pieds traités et témoins furent placées dans des sacs en papier et observées avec soin.

Les tubercules produits par les pieds munis du circuit oscillant en cuivre se conservèrent d'une manière très satisfaisante et purent être replantés successivement plusieurs années de suite, ce qui indique une diminution très nette de la dégénérescence habituelle des cultures de pommes de terre dans les régions méditerranéennes de faible altitude.

L'orientation de l'ouverture des circuits oscillants, par rapport au méridien magnétique, joue un rôle important. En 1929-30, des pieds de pommes de terre furent groupés par quatre autour d'un pivot central en bois sur lequel furent fixés les quatre circuits Lakhovsky disposés en étoile. Ce dispositif, qui maintenait une distance de 35cm environ entre les pieds, éliminait les différences de fertilité du sol, au moins en partie. Aucun engrais ni amendement ne fut employé dans ces expériences.

Les résultats numériques suivants représentent la moyenne d'expériences effectuées sur plus de deux cents pieds entourés de circuits Lakhovsky en cuivre. Pour différentes orientations de l'ouverture du circuit, les moyennes des résultats obtenus ont été proportionnelles aux nombres suivants :

Orientation des extrémités des circuits oscillant vers :

le Nord	10
le Sud	5.5
l'Est	4
l'Ouest	3.5

Au contraire l'action déprimante de l'aluminium a été plus marquée dans la direction du Nord, mais les observations (poids, conservation, etc.) avec ce métal ont été rendues plus difficiles par suite des déprédations des ravageurs souterrains. Le nickel et le plomb ont donné lieu à des observations du même ordre.

Il nous paraît intéressant de signaler que le circuit de Lakhovsky est beau-

coup moins efficace placé horizontalement que s'il est incliné vers la verticale. Lorsque les pointes sont redressées vers le haut, l'action est complètement nulle et, parfois, il se produit un effet nuisible.

Ces expériences montrent suffisamment comment les circuits de Lakhovsky peuvent être utilisés avec succès pour lutter contre la dégénérescence des pommes de terre. Ils font également ressortir l'influence très marquée de la nature du métal constituant le circuit.

PHYSIOLOGIE. — *Influence des saisons sur les combustions respiratoires chez le chien.* Note de MM. **F. Maignon** et **J. Guilhon**, présentée par M. E. Leclainche.

L'un de nous a montré dans des recherches antérieures que les saisons influencent la glycogénie et que cette influence s'exerce en partie par l'intermédiaire des glandes génitales, car la castration chez le cobaye mâle atténue considérablement ces variations sans toutefois les supprimer complètement. Le glycogène musculaire, chez le chien, présente deux maxima au printemps et à l'automne et deux minima en hiver et été. Les maxima coïncident toujours avec les périodes d'activité génitale et leur nombre varie avec celui de ces dernières. Le maximum de printemps est toujours le plus important.

Cette influence des glandes génitales sur la glycogénie se traduit encore par ce fait que les muscles des mâles sont toujours plus riches en glycogène que ceux des femelles, et que la castration chez le cobaye mâle abaisse le taux du glycogène musculaire, tandis que l'injection de suc testiculaire produit l'effet inverse ([1]).

Des variations saisonnières analogues ont été constatées, chez le cobaye, à propos des combustions respiratoires ([2]).

Dans des recherches ultérieures, Maignon et Painvin ([3]) ont retrouvé ces mêmes influences sur les combustions respiratoires chez le chien. Sur des

---

([1]) F. Maignon, *Influence des saisons sur la richesse des muscles en glycogène* (*Comptes rendus*, 145, 1907, p. 334), *Influence des glandes génitales sur la glycogénie* (*Comptes rendus*, 150, 1910, p. 721).

([2]) F. Maignon, *Influence des saisons et des glandes génitales sur les combustions respiratoires chez le cobaye* (*Comptes rendus*, 156, 1913, p. 347).

([3]) F. Maignon et A. Painvin, *Influence des saisons sur les combustions respiratoires chez le chien* (*Comptes rendus*, 188, 1929, p. 573).

animaux maintenus sensiblement à la même température, hiver et été, la consommation d'oxygène, chez l'animal à jeun, passe par deux maxima au printemps et à l'automne et par deux minima, en été et en hiver, le maximum de printemps étant toujours plus important que celui d'automne.

Par analogie avec ce qui avait été constaté pour la glycogénie, il était à prévoir que les glandes génitales devaient influencer aussi les combustions.

Cette question a fait l'objet de très nombreuses recherches expérimentales. Chez le chien la grande majorité des auteurs s'accordent à reconnaître que la castration entraîne une chute des combustions, mais, alors que certains n'ont obtenu que des abaissements légers de 10 à 20 pour 100 (Lœwy et Richter, de Vita, Ekstein et Grafe), d'autres signalent des chutes de 37 et même 59 pour 100 (Ptaszek). Par contre Lutje, en 1902, n'a pas constaté de différence entre les témoins et les castrés et, pour Karentschewsky, l'abaissement n'est pas constant.

	Témoin. I. 4 ans (10kg).	II. 3 ans (8kg).	III. 6 ans (7kg).	IV. 2 ans (9kg).	V. 4 ans (7kg).	VI. 8 ans (6kg).
Mai 1929	–	0,558	–	–	–	–
Juin		0,524 castrat. 0,251 0,386	–	–	–	–
Juillet		0,365	–	–	–	–
Août		–	–	–	–	
Septembre	–	–	–	–	–	
Octobre	–	0,591	–	–	–	–
Novembre	–	0,481	–	–	–	–
Décembre	–	0,428	0,721	–	–	–
Janvier 1930	0,395	0,454	0,684 castrat. 0,622	0,463	–	–
Février	–	0,541	0,720	0,443 castrat.	–	–
Mars	0,446	0,602	0,719	0,406	–	–
Avril	0,508	0,602	0,752	0,498	–	–
Mai	0,518	0,598		0,489	–	–
Juin	0,457	0,573	–	–	–	–
Juillet	0,402	0,481	–	–	0,483 castrat. 0,452	0,604 castrat. 0,591

Pour Ptaszek, la castration chez le chien produirait d'abord un abaissement du métabolisme basal, suivi d'un relèvement à la normale, puis, au cours d'une troisième période seulement, un abaissement définitif.

Nous avons repris ces recherches chez le chien en déterminant les combustions respiratoires sur des sujets à jeun, par la méthode de confinement. Les animaux séjournaient de 15 à 16 heures dans une cage de 2^{m^3}; l'analyse de l'air était effectuée à l'aide de l'eudiomètre de Laulanié.

Les résultats que nous avons obtenus montrent que les divergences entre les auteurs s'expliquent par les variations saisonnières. Les animaux étaient maintenus en hiver dans des locaux chauffés, afin d'éliminer le plus possible le facteur thermique. Les variations des combustions ne sont d'ailleurs nullement en relation avec celles de la température.

Nous donnons dans le tableau ci-dessus les résultats de nos expériences. Les chiffres, qui représentent des moyennes de plusieurs déterminations, expriment le coefficient respiratoire, c'est-à-dire la consommation d'oxygène par heure et par kilogramme.

Résultats et conclusion. — Sur le chien témoin, nous avons constaté très nettement les variations saisonnières des combustions respiratoires avec le maximum de printemps en mai.

Sur le chien II, la castration effectuée le 5 juin, c'est-à-dire au moment où la courbe était encore haute tout en commençant à baisser, la consommation d'oxygène a subi une chute importante de 52 pour 100. Le coefficient respiratoire est tombé de 0,524 à 0,251.

Pour les autres sujets d'expérience, la castration, effectuée au moment des parties basses de la courbe (janvier, février, juillet), n'a produit qu'une chute légère. Dans un cas, en juillet (exp. VI), l'abaissement a même été à peu près nul.

Les expériences II, III et IV montrent que les sujets castrés recommencent à subir au bout d'un temps assez court, trois semaines à un mois environ, l'influence des saisons, et cela d'une façon sensiblement aussi marquée que les témoins. Un autre organe, peut-être l'hypophyse comme le pense Ptaszek, effectue la compensation. C'est cette compensation qui permet de comprendre le relèvement assez rapide des combustions après la chute.

On peut expliquer les divergences des résultats obtenus par les auteurs par l'époque de l'année à laquelle la castration a été faite.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Recherches sur le rôle des lipides et des protéides sanguins dans les échanges d'eau dans l'organisme.* Note [1] de M. A. **Macheboeuf**, présentée par M. G. Bertrand.

Starling [2] a montré le rôle primordial joué par les protéides du plasma sanguin dans les échanges d'eau et de sels entre les tissus et le sang. Il appela pression osmotique des protéides du sérum la différence de pression hydrostatique existant entre du sérum sanguin et une solution saline isotonique lorsque ces deux liquides sont en équilibre de part et d'autre d'une membrane imperméable aux protéides mais perméable aux sels et à l'eau. Starling mit en évidence le rôle de cette pression osmotique et le rôle de la pression hydrostatique intra-capillaire dans les échanges d'eau et de sels entre le sang et les tissus à travers la paroi des capillaires. Govaerts [3] vérifia que la condition d'apparition des œdèmes chroniques est l'existence au niveau des capillaires veineux d'une pression hydrostatique supérieure à la pression osmotique des protéides du plasma.

On ne peut plus conserver le terme proposé par Starling : pression osmotique des protéides, car on sait aujourd'hui que la pression ainsi mesurée ne dépend pas seulement du nombre de molécules protéidiques mais dépend surtout de l'inégale répartition des ions diffusibles de part et d'autre de la membrane sous l'influence des ions protéidiques non diffusibles (équilibre de Donnan). Je nommerai pour abréger pression de Starling le phénomène mesuré par Starling.

Au cours d'une série de recherches sur des sérums pathologiques [4] il nous est apparu que, dans le sérum, les protéides n'agissent pas seuls sur la pression de Starling, et j'ai soupçonné une intervention des lipides. Quelques essais physico-chimiques m'ont amené à émettre l'hypothèse suivante :

Certains lipides du sérum sont combinés aux protéides de diverses manières, ils peuvent suivant les cas diminuer l'ionisation des protéides ou, au contraire, s'ioniser eux-mêmes en augmentant très sensiblement le nombre

---

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) Starling, *Journ. of Physiol.*, **19**, 1895, p. 312.

(3) Govaerts, *C. R. Soc. Biol.*, **89**, 1923, p. 678 et 680; **90**, 1924, p. 969; **101**, 1924, p. 116, et **93**, 1925, p. 441.

(4) Macheboeuf, *Bull. Soc. Chim. biol.*, **11**, 1929, p. 268 et 485. — Macheboeuf et Wahl, *Bull. Soc. Chim. biol.*, **13**, 1931 (sous presse).

des fonctions ionisées non diffusibles présentes dans le sérum. Il semble que l'organisme puisse, dans certains cas, réagir contre une baisse de la pression de Starling en augmentant la teneur du sérum en lipides ionisables. Certains lipides et tout particulièrement, semble-t-il, les phosphoaminolipides, contribueraient donc à la régulation de la pression osmotique existant entre le plasma d'une part et le milieu extra-capillaire d'autre part.

Pour vérifier ces hypothèses j'ai étudié des sérums normaux et des sérums de malades atteints de lipémie et tout particulièrement de néphrose lipoïdique (hyperlipémie, hypoalbuminémie et œdèmes).

On sait que le fibrinogène et les globulines, de poids moléculaires très élevés et qui sont peu ionisés au pH du sérum sont beaucoup moins actifs que les albumines sur la pression de Starling du plasma et sur l'équilibre plasma-tissus. J'ai donc étudié les albumines qui ont été séparées des globulines par le sulfate d'ammonium.

L'étude de ces albumines [1] a révélé les faits suivants :

1° En présence d'un liquide dialyseur commun, les albumines provenant de sérums de néphrose lipoïdique se diluent, à poids égal de protéides, plus que des albumines normales ; toutes les conditions étaient égales, seules différaient les teneurs en lipides entraînés par les albumines lors de leur séparation.

2° Pour amener au pH normal du sang (7,3) un gramme d'albumines de sérum de néphrose lipoïdique préalablement placé à l'isoélectrique ($pH = 4,7$), il faut beaucoup plus d'alcali que pour une même quantité d'albumines normales ; toutes les conditions étaient égales, seules différaient les teneurs en lipides.

3° Du côté acide de l'isoélectrique, par contre, la présence des lipides ne change pas l'effet tampon par gramme d'albumines, et les courbes de titration sont, dans la néphrose lipoïdique, superposables aux courbes normales.

On pourrait expliquer ces faits par une différence de nature des albumines, mais l'isoélectrique est le même, et, de plus, il semble que les lipides, dans les sérums de néphrose lipoïdique, soient unis d'une façon anormale aux protéides ; on peut en effet extraire ces lipides par l'éther plus complètement que dans les sérums normaux [2], et ceci est particulièrement net pour la lécithine.

---

(1) Ces expériences ont été effectuées avec l'aide zélée de G. Sandor avec qui nous publierons sous peu un Mémoire détaillé sur ce sujet.

(2) Macheboeuf et Wahl, *Bull. Soc. Chim. biol.*, **13**, 1931 (sous presse).

Dans le sérum normal de cheval j'ai, d'autre part, pu séparer, par précipitations fractionnées à des pH variables en présence de quantités variables de sulfate d'ammonium, deux fractions albuminiques particulièrement riches en phospholipides. Dans l'une de ces fractions l'effet tampon de 1g de protéides était de part et d'autre de l'isoélectrique inférieur à celui d'un poids égal de sérum-albumine de cheval cristallisée; tandis que dans l'autre fraction albumineuse riche en lécithine, l'effet tampon était à peu près normal du côté acide de l'isoélectrique, mais très supérieur à la normale du côté alcalin comme cela a lieu pour les albumines totales des sérums de néphrose lipoïdique.

Pour réagir aux variations de la pression de Starling, l'organisme pourrait faire changer la quantité de certains lipides et leur mode de combinaison de façon à faire augmenter ou diminuer l'une ou l'autre des fractions albumino-lipidiques dont l'ionisation est différente de l'ionisation propre des protéides qui entrent dans leur constitution.

Il va sans dire que ce mode de réaction est souvent insuffisant pour ramener la pression de Starling à une valeur assez élevée pour empêcher l'apparition des œdèmes.

PATHOLOGIE GÉNÉRALE. — *Glutathion, croissance et cancer des plantes.* Note (1) de MM. **Léon Binet** et **J. Magrou**, présentée par M. F. Mesnil.

Depuis que F. G. Hopkins a démontré l'existence dans les tissus vivants d'un corps soufré particulier, le glutathion (formé d'une molécule de cystéine unie à une molécule d'acide glutamique), divers auteurs ont fait jouer à ce corps un rôle important dans les phénomènes de croissance et ont signalé une teneur élevée en glutathion dans les tissus normaux en période de prolifération et dans le tissu cancéreux.

Il nous a semblé intéressant d'aborder une telle étude en effectuant le dosage du glutathion dans la plante atteinte de cancer expérimental. Pour cela nous avons eu recours au *Pelargonium zonale*, inoculé avec le *Bact. tumefaciens*; nous y avons dosé le glutathion réduit, en utilisant la technique de H. E. Tunnicliffe [qui a été employée ailleurs par l'un de nous (2)] et en recourant à l'amidon comme indicateur. Nos dosages ont porté sur la tumeur cancéreuse (soit en période d'accroissement, soit en période de

(1) Séance du 26 mai 1931.

(2) A. Blanchetière, Léon Binet et Mélon, *Journ. Physiol. et Pathol. gén.*, 27, 1929, p. 1.

nécrose), sur le bourgeon terminal, sur la feuille, sur la tige verte, sur le bouton floral et sur la fleur épanouie. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Taux du glutathion réduit exprimé en milligrammes pour 100g *de tissu frais chez* Pelargonium *inoculé.*

Pelargonium.	N° 90 inoculé le 15-1-31, examiné le 29-4-31.	N° 111 inoculé le 29-1-31, examiné le 4-5-31.	N° 140 inoculé le 29-1-31, examiné le 13-5-31.	N° 290 inoculé le 2-3-29, examiné le 9-5-31.	N° 333 inoculé le 8-5-30. examiné le 9-5-31.
Tumeur en évolution.	437	316	400	–	–
» en nécrose...	–	–	–	0	{ 25 { 0
Bourgeon terminal...	–	500	1000	833	1000
Tige verte..........	116	142	83	116	166
Feuille verte........	222	156	101	142	166
Bouton floral.......	–	–	176	–	–
Fleur épanouie......	–	–	176	–	–

Ces chiffres, enregistrés sur le *Pelargonium* inoculé avec le *Bact. tumefaciens*, permettent de conclure comme il suit :

1° Dans la tumeur en période évolutive (nos 90, 111 et 140), le taux du glutathion réduit est beaucoup plus élevé (316 à 437mg pour 100g) que dans la feuille (101 à 222) et que dans la tige (83 à 142).

2° Cette élévation de la teneur en glutathion est fonction de la rapidité de croissance de la tumeur. Le gluthation disparaît de la tumeur quand celle-ci se nécrose (nos 290 et 333). D'autre part, la malignité de la tumeur ne semble pas jouer, comme l'ont déjà soutenu J. Lecloux, R. Vivario et J. Firket dans le cas de la souris sarcomateuse. En effet, dans le bourgeon terminal normal de *Pelargonium*, dont la prolifération est considérable, le glutathion atteint des chiffres beaucoup plus élevés encore (de 500 à 1000mg).

M. **Émile Roger** adresse une Note intitulée *Répartition des années chaudes et froides depuis* 1757, *pour le climat de Paris*.

La séance est levée à 15h35m.

A. Lx.